Polygones — Exercices Physique 9e HarmoS

Exercice 1

1. En découpant un polygone convexe à n côtés en triangles à partir d'un seul sommet, justifier la formule donnant la **somme des angles intérieurs** :

$$S_n = (n-2) \times 180^\circ$$

2. Calculer la somme des angles intérieurs d'un pentagone ($n = 5$), d'un hexagone ($n = 6$) et d'un octogone ($n = 8$).
3. Dans un hexagone convexe $ABCDEF$, cinq angles mesurent 110°, 125°, 130°, 115° et 105°. Calculer la mesure du sixième angle $\widehat{F}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Pour un **polygone régulier** convexe à n côtés, tous les côtés ont même longueur et tous les angles intérieurs ont même mesure α_n.

1. Donner les formules de l'**angle au centre** θ_n, de l'**angle extérieur** e_n et de l'**angle intérieur** α_n.
2. Compléter le tableau suivant pour le pentagone (5), l'octogone (8), le décagone (10) et le dodécagone (12) :

n	5	8	10	12
θ_n (angle au centre)	?	?	?	?
α_n (angle intérieur)	?	?	?	?

3. Quel polygone régulier possède un angle intérieur égal à 156° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Dans un polygone convexe à n côtés, on peut tracer des diagonales reliant deux sommets non consécutifs.

1. Expliquer pourquoi le nombre total de diagonales vaut $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.
2. Combien de diagonales possède un décagone ($n = 10$) ?
3. Un polygone convexe possède exactement 54 **diagonales**. Combien a-t-il de côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Tracés à la règle non graduée et au compas :

On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 5$ cm.

1. Expliquer comment construire avec précision un **hexagone régulier** $ABCDEF$ inscrit dans $\mathcal{C}$ en n'utilisant que le compas et la règle.
2. Expliquer comment en déduire immédiatement :
   - un **triangle équilatéral** inscrit dans $\mathcal{C}$;
   - un **dodécagone régulier** (12 côtés) inscrit dans $\mathcal{C}$.
3. Quel est le périmètre exact de l'hexagone régulier $ABCDEF$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Construction à la règle et au compas d'un octogone régulier et d'un pentagone régulier :

1. Décrire le protocole à la règle et au compas permettant de construire un **octogone régulier** inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

2. On souhaite maintenant construire un **pentagone régulier** inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 1$ (méthode de Ptolémée) :
   - Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AA']$ et $[BB']$.
   - Placer M, milieu du rayon $[OA']$.
   - Reporter au compas la longueur MB sur le diamètre $[AA']$ (de M vers O, jusqu'au point K sur $[OA]$).
   - Calculer par le théorème de Pythagore la longueur MB, puis OK, et enfin la longueur BK (qui donne exactement la longueur du côté du pentagone régulier : $c_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Polygones étoilés $\{n/k\}$ (notation de Schläfli) : On place n sommets régulièrement espacés sur un cercle et, en partant d'un sommet, on trace une corde en sautant de k **sommets en** k **sommets** jusqu'à revenir au point de départ (avec $1 < k < n/2$).

1. Donner la condition arithmétique sur n et k pour que la figure $\{n/k\}$ soit tracée **d'un seul trait continu** en passant par tous les n sommets (polygone étoilé vrai).
2. Parmi les notations suivantes, indiquer lesquelles forment un vrai polygone étoilé d'un seul trait et lesquelles se décomposent en plusieurs polygones superposés (préciser lesquels) :
   - $\{5/2\}$, $\{6/2\}$, $\{7/2\}$, $\{7/3\}$, $\{8/2\}$, $\{8/3\}$, $\{9/3\}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Angles aux pointes des polygones étoilés : Lorsqu'on trace un polygone étoilé régulier $\{n/k\}$ inscrit dans un cercle, chaque côté sous-tend un arc correspondant à k intervalles sur n.

1. En utilisant la somme des angles au sommet dans les triangles ou les arcs interceptés (l'angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre), montrer que l'angle intérieur β à chaque pointe de $\{n/k\}$ vaut :
$$\beta = 180^\circ \times \frac{n-2k}{n}$$
2. Calculer l'angle à la pointe du pentagramme $\{5/2\}$, de l'octagramme $\{8/3\}$ et des deux heptagrammes $\{7/2\}$ et $\{7/3\}$ (arrondir au dixième de degré si nécessaire).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Segments moyens et théorème de Varignon : On rappelle le *théorème des milieux (segment moyen)* : dans tout triangle ABC, le segment joignant les milieux I de $[AB]$ et J de $[AC]$ est **parallèle** à $[BC]$ et mesure la **moitié** de $[BC]$ ($IJ = \frac{1}{2}BC$).

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque dont les diagonales mesurent $AC = 14$ cm et $BD = 10$ cm. On note I, J, K, L les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. En appliquant le théorème des milieux dans les triangles ABC et ADC, montrer que $(IJ)//(KL)$ et que $IJ = KL = 7$ cm.
2. En déduire la nature exacte du quadrilatère $IJKL$ (appelé *parallélogramme de Varignon*) et calculer son **périmètre**.
3. Quelle condition doivent vérifier les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ pour que $IJKL$ soit un **losange** ? un **rectangle** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Polygones diminués par les milieux : On part d'un carré C_0 de côté $a_0 = 8$ cm. En joignant les milieux des 4 côtés de C_0, on obtient un nouveau carré C_1 (polygone diminué d'ordre 1). En joignant les milieux des côtés de C_1, on obtient C_2, et ainsi de suite.

1. Calculer l'aire $\mathcal{A}_0$ de C_0, puis déterminer l'aire $\mathcal{A}_1$ de C_1 (par découpage géométrique ou par le théorème de Pythagore).
2. En déduire le rapport d'aire $\frac{\mathcal{A}_{k+1}}{\mathcal{A}_k}$ entre deux étapes successives, puis calculer $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.
3. Calculer la longueur du côté a_2 de C_2 et expliquer pourquoi C_2 est une réduction homothétique de C_0 de rapport $\frac{1}{2}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Polygones diminués (troncature d'un carré) : On part d'un carré $ABCD$ de côté 10 cm ($\mathcal{A} = 100$ cm^2). À chacun des 4 sommets, on retranche un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés perpendiculaires mesurent x cm (avec $0 < x < 5$), de façon à obtenir un **octogone**.

1. Quelle condition doit vérifier x pour que cet octogone soit **régulier** (tous ses côtés de même longueur) ? Calculer la valeur exacte de x (en utilisant $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ pour l'approximation).
2. Pour un carré diminué général où l'on retire aux 4 coins des triangles rectangles isocèles de cathète $x = 3$ cm, calculer le **périmètre** et l'**aire** de l'octogone obtenu (donner les valeurs exactes avec $\sqrt{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On considère un **décagone régulier** (10 côtés).

1. Calculer la somme de ses angles intérieurs.
2. Calculer la mesure d'un angle intérieur et d'un angle extérieur.
3. Vérifier que la somme des angles extérieurs vaut 360°.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés est $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

1. Justifier cette formule.
2. Calculer le nombre de diagonales d'un hexagone et d'un décagone.
3. Quel polygone possède exactement 20 diagonales ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

1. Un polygone régulier a des angles extérieurs de 24°. Combien a-t-il de côtés ? Quelle est la somme de ses angles intérieurs ?
2. Existe-t-il un polygone régulier dont les angles intérieurs mesurent 100° ? 140° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un hexagone régulier a des côtés de 6 cm.

1. Expliquer pourquoi il se découpe en 6 triangles équilatéraux.
2. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. Calculer l'aire de l'hexagone (valeur exacte et arrondi au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Archimède encadrait π à l'aide de polygones réguliers inscrits dans un cercle.

On considère un cercle de rayon 1 et l'hexagone régulier inscrit.

1. Quel est le périmètre de l'hexagone ? Celui du cercle ?
2. En déduire une première approximation de π (par défaut).
3. Pourquoi l'approximation s'améliore-t-elle avec 12, 24, 48 ou 96 côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Les angles d'un quadrilatère convexe mesurent x, $2x$, $3x$ et $4x$ (en degrés).

1. Calculer x et les quatre angles.
2. Montrer que ce quadrilatère possède deux côtés parallèles (on pourra considérer les angles consécutifs x et $4x$, en supposant qu'ils sont adjacents au même côté).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un pentagone convexe a quatre angles de 100°, 110°, 120° et 130°.

1. Calculer le cinquième angle.
2. Pourrait-il exister un pentagone convexe dont quatre angles mesurent 150° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On part d'un triangle équilatéral de côté 9 cm. À chaque sommet, on coupe un petit triangle équilatéral de côté 3 cm.

1. Quelle est la nature du polygone obtenu ? Justifier.
2. Quelle fraction de l'aire du grand triangle représente-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un carré est inscrit dans un cercle de rayon 5 cm (ses sommets sont sur le cercle).

1. Que vaut la diagonale du carré ?
2. Calculer l'aire du carré à l'aide de ses diagonales.
3. Quel pourcentage de l'aire du disque le carré occupe-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Peut-on paver un sol uniquement avec des pentagones réguliers ? Avec des hexagones réguliers ? Justifier en étudiant les angles qui se rencontrent en un sommet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Combien de diagonales partent d'un sommet d'un décagone convexe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Combien de diagonales a un heptagone convexe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Quelle est la somme des angles d'un dodécagone convexe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un polygone régulier a des angles extérieurs de 24°. Combien de côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Quelle est la mesure intérieure d'un angle du pentagone régulier ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un polygone régulier de 14 côtés a un périmètre de 63 cm. Quelle longueur d'un côté ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Combien de côtés a un polygone dont les angles intérieurs totalisent 1 260° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Les côtés d'un polygone sont égaux. Est-il forcément régulier ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Quatre angles d'un pentagone convexe valent 85°, 100°, 108° et 117°. Quel est le cinquième ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Quel angle minimal positif ramène un octogone régulier sur lui-même par rotation autour du centre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site