Nombres naturels et nombres premiers — Exercices Physique 9e HarmoS

Exercice 1

Crible d'Ératosthène :

1. Pourquoi le nombre 1 n'est-il pas considéré comme un nombre premier ?
2. Dresser la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 60.
3. Pour tester si 89 est premier, jusqu'à quel nombre premier suffit-il de vérifier la divisibilité ? Justifier et conclure sur 89.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Décomposer les entiers suivants en **produit de facteurs premiers** (en regroupant les facteurs identiques sous forme de puissances) :

1. $A = 360$
2. $B = 1\,260$
3. $C = 2\,310$
4. En déduire $\text{PGDC}(A; B)$ et $\text{PPMC}(A; B)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Soit $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$.

1. Tout diviseur de N s'écrit sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$. Quelles sont les valeurs possibles pour chacun des exposants a, b et c ?
2. En déduire le **nombre total de diviseurs** de 360.
3. Combien de diviseurs possède le nombre $M = 1\,800$?
4. Trouver le plus petit entier naturel non nul possédant exactement 12 **diviseurs**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

On considère l'entier $N = 180$.

1. Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul k tel que $180 \times k$ soit un **carré parfait** ? Préciser la racine carrée de ce carré parfait.
3. Quel est le plus petit entier naturel non nul m tel que $180 \times m$ soit un **cube parfait** ? Préciser la racine cubique de ce cube parfait.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Sur les traces d'Euclide (infinité des nombres premiers) :

Pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers, Euclide multiplie les premiers nombres premiers connus et ajoute 1. On définit $E_n = (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n) + 1$.

1. Calculer $E_1 = 2 + 1$, $E_2 = (2 \times 3) + 1$, $E_3 = (2 \times 3 \times 5) + 1$ et $E_4 = (2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1$. Sont-ils tous premiers ?
2. Calculer $E_6 = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1$. Sachant que $E_6 = 59 \times 509$, E_6 est-il premier ?
3. Expliquer pourquoi, même lorsque E_n n'est pas premier, il possède obligatoirement un diviseur premier **différent** de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

1. On appelle **nombres premiers jumeaux** deux nombres premiers dont la différence vaut 2 (comme 3 et 5). Trouver toutes les paires de nombres premiers jumeaux inférieures à 50.
2. Expliquer pourquoi $3, 5, 7$ est le **seul triplet** de nombres premiers de la forme $(p; p+2; p+4)$.
3. À l'inverse, on peut trouver de longues suites d'entiers consécutifs **tous composés** (non premiers) : donner un exemple de 5 **entiers consécutifs tous composés** (par exemple entre 20 et 30, ou à l'aide des factorielles).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

La conjecture de Goldbach (1742) affirme que *« tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers »*. Ce problème célèbre n'est toujours pas démontré aujourd'hui.

1. Vérifier la conjecture pour 28 et 46 en trouvant **toutes** les façons possibles de les écrire comme somme de deux nombres premiers (à l'ordre des termes près).
2. Trouver toutes les décompositions de Goldbach pour 100.
3. Donner au moins une décomposition de Goldbach pour 2 026 (on donne que 1 997 et 2 003 sont premiers).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

1. **Conjecture faible de Goldbach** (démontrée par Harald Helfgott en 2013) : *« Tout nombre entier impair supérieur ou égal à 7 peut s'écrire comme la somme de trois nombres premiers. »*
   - Écrire 17, 35 et 51 comme somme de trois nombres premiers.
2. Montrer que si la conjecture *forte* de Goldbach (question précédente) est vraie pour tout nombre pair ≥ 4, alors la conjecture *faible* est automatiquement vraie pour tout nombre impair ≥ 7.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un entier naturel est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (tous ses diviseurs sauf lui-même).

1. Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
2. Euclide a montré que si $2^p - 1$ est un **nombre premier** (appelé *nombre premier de Mersenne*), alors $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.
   - Calculer le nombre parfait obtenu pour $p = 5$.
3. On teste $p = 11$: $2^{11} - 1 = 2\,047$. Ce nombre de Mersenne est-il premier ? (Tester sa divisibilité par 23.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

La conjecture de Syracuse (ou de Collatz) : On part d'un entier naturel $n \geq 1$ et l'on construit une suite selon la règle :

- si n est **pair**, le terme suivant vaut $n \div 2$;
- si n est **impair**, le terme suivant vaut $3n + 1$.

1. Calculer le « vol » complet (jusqu'à atteindre 1) en partant de $n = 11$, puis de $n = 27$ (seulement les 10 premiers termes pour 27).
2. Pour $n = 11$, quel est le **temps de vol** (nombre d'étapes pour arriver à 1) et quelle est l'**altitude maximale** atteinte ?
3. Que se passe-t-il une fois que la suite atteint 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Parmi les nombres 221, 223, 227 et 229, lesquels sont premiers ? Justifier en précisant jusqu'à quel nombre premier il suffit de tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On appelle **nombres de Mersenne** les nombres $M_n = 2^n - 1$.

1. Calculer M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 et M_7. Lesquels sont premiers ?
2. On constate que si n n'est pas premier, M_n ne l'est pas. Que dire de la réciproque ? Tester $M_{11} = 2\,047$ avec le diviseur 23.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

1. Décomposer 720 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire le nombre de ses diviseurs.
3. Combien de ses diviseurs sont impairs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Le mathématicien Leonhard Euler a remarqué que l'expression $P(n) = n^2 + n + 41$ donne souvent des nombres premiers.

1. Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
2. Calculer $P(40)$. Ce nombre est-il premier ?
3. Que retenir de cet exemple ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

1. Écrire les nombres premiers entre 5 et 50 et calculer, pour chacun, le reste de sa division par 6. Que remarque-t-on ?
2. Expliquer pourquoi tout nombre premier supérieur à 3 s'écrit $6k + 1$ ou $6k + 5$.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Donner la liste de tous les nombres premiers compris entre 100 et 130.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Euclide a montré qu'il existe une infinité de nombres premiers en multipliant des nombres premiers et en ajoutant 1.

1. Calculer $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$.
2. Vérifier que $N = 59 \times 509$. N est-il premier ?
3. Pourquoi aucun des nombres $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ne divise-t-il N ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

1. Décomposer $7\,056$ en produit de facteurs premiers.
2. En déduire $\sqrt{7\,056}$ sans calculatrice.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On donne $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 7$.

1. Calculer a et b.
2. Déterminer $\text{PGDC}(a;b)$ et $\text{PPMC}(a;b)$ sous forme de produits de facteurs premiers, puis en écriture décimale.
3. Vérifier que $\text{PGDC} \times \text{PPMC} = a \times b$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

1. Calculer $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$.
2. Montrer que les cinq nombres consécutifs $6!+2$, $6!+3$, $6!+4$, $6!+5$, $6!+6$ ne sont pas premiers.
3. Comment obtenir 100 nombres consécutifs non premiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Décide si 113 est premier en limitant le nombre de divisions à tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Réfute l'affirmation « 133 est premier » à l'aide d'une égalité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Décompose 360 en facteurs premiers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Liste les nombres premiers compris entre 49 et 69, bornes incluses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Donne un composé impair dont le plus petit facteur premier est 13.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien de diviseurs positifs possède 676 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Quel est le plus petit entier par lequel multiplier 26 pour obtenir un carré parfait ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Trouve deux nombres premiers dont le produit est 1469.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Parmi 13, 169 et 27, quels nombres sont premiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une étiquette indique que 360 a exactement deux facteurs premiers distincts. Contrôle l'étiquette.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site