# Isométries et pavages — Exercices Physique 9e HarmoS

## Exercice 1

On rappelle qu'une **isométrie** du plan est une transformation géométrique qui conserve les longueurs et les angles.

1. Citer les 4 **types d'isométries** du plan et préciser, pour chacune, les éléments géométriques qui la définissent entièrement.
2. Préciser lesquelles sont des **déplacements** (conservent l'orientation des figures, dits *isométries directes*) et lesquelles sont des **retournements** (inversent l'orientation, dits *isométries indirectes*).
3. Dans un repère orthonormé, le triangle $ABC$ a pour sommets $A(1;2)$, $B(4;2)$ et $C(2;5)$. Donner les coordonnées de son image $A'B'C'$ par :
   - la translation de vecteur $\vec{u}(3;-1)$ ;
   - la symétrie centrale de centre $O(0;0)$ (rotation de $180°$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 2

**Composition de deux symétries axiales :**

1. Soient deux droites parallèles $d_1$ et $d_2$ distantes de 3 cm (avec $d_2$ située 3 cm à droite de $d_1$). On applique d'abord la symétrie d'axe $d_1$, puis la symétrie d'axe $d_2$ à un point $M$. Quelle isométrie simple réalise directement cette transformation composée ? Préciser ses caractéristiques.
2. Soient maintenant deux droites $d_1$ et $d_2$ sécantes en un point $O$ et formant un angle de $35°$ (dans le sens anti-horaire de $d_1$ vers $d_2$). Quelle isométrie simple réalise la composée $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ (d'abord $d_1$, puis $d_2$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 3

**Composition d'isométries dans le plan repéré :** On considère le point $P(4;1)$.

1. On applique d'abord à $P$ une rotation $r_1$ de centre $O(0;0)$ et d'angle $+90°$ (quart de tour anti-horaire) pour obtenir $P_1$, puis une translation $t$ de vecteur $\vec{u}(2;-3)$ pour obtenir $P_2$. Calculer les coordonnées de $P_1$ et $P_2$.
2. Que obtient-on si l'on effectue les deux transformations dans l'**ordre inverse** (d'abord la translation $t$, puis la rotation $r_1$) ? Noter $Q_2$ le point final. Conclure sur la commutativité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 4

**Pavages réguliers du plan :** Un pavage est dit *régulier* s'il recouvre tout le plan sans trou ni chevauchement à l'aide d'**un seul type de polygone régulier**, assemblé bord à bord.

1. En un sommet commun où se rejoignent $k$ polygones réguliers identiques à $n$ côtés ($n \geq 3$ et $k \geq 3$), quelle équation relie $k$ et l'angle intérieur $\alpha_n = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$ ?
2. Résoudre cette équation pour démontrer qu'il n'existe exactement que 3 **pavages réguliers** possibles dans tout le plan (et préciser leurs noms).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 5

**Paver avec un triangle ou un quadrilatère quelconque :**

1. Expliquer à l'aide d'une isométrie précise (**demi-tour / symétrie centrale**) comment on peut paver tout le plan avec **n'importe quel triangle** $ABC$ (même scalène quelconque).
2. Expliquer pourquoi **tout quadrilatère quelconque** $ABCD$ (même non convexe !) pave également le plan, en indiquant quelles isométries permettent de placer ses voisins autour d'un quadrilatère de départ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 6

**Pavages semi-réguliers (archimédiens) — Condition aux sommets :** Un pavage semi-régulier utilise **plusieurs types** de polygones réguliers de même longueur de côté, disposés dans **le même ordre cyclique autour de chaque sommet**. On le note par la suite des nombres de côtés des polygones autour d'un sommet, par exemple $(3, 6, 3, 6)$.

1. Vérifier que la somme des angles autour d'un sommet vaut bien $360°$ pour les configurations suivantes :
   - $(3, 6, 3, 6)$ *(kagomé)* ;
   - $(4, 8, 8)$ ;
   - $(3, 12, 12)$ ;
   - $(3, 4, 6, 4)$.
2. Tester la configuration $(5, 5, 10)$ (2 pentagones et 1 décagone) : la somme des angles vaut-elle $360°$ ? Peut-elle malgré tout former un pavage uniforme du plan ? *(Indice : examiner le sommet voisin autour du pentagone.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 7

**Classification des pavages d'Archimède :** Il existe exactement 8 **pavages semi-réguliers** d'Archimède (plus les 3 réguliers, soit 11 pavages uniformes).

1. Montrer que l'équation des angles $\sum_{i=1}^{k} \alpha_{n_i} = 360°$ autour d'un sommet de degré $k$ est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k-2}{2}$$

2. Vérifier cette relation pour le pavage $(4, 6, 12)$ $(k = 3)$ et pour le pavage $(3, 3, 3, 4, 4)$ $(k = 5)$.
3. Quelle différence géométrique distingue les deux pavages archimédiens $(3, 3, 3, 4, 4)$ et $(3, 3, 4, 3, 4)$ qui utilisent pourtant les mêmes polygones (3 triangles et 2 carrés par sommet) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 8

**Motif minimal (domaine fondamental) et pavages de type Escher :** On part d'un carré de côté 4 cm.

1. On modifie le bord gauche en découpant un demi-disque de rayon 1 cm vers l'intérieur, et l'on **colle ce même demi-disque** exactement à la même hauteur sur le bord droit vers l'extérieur (translation horizontale).
2. On découpe de même un triangle isocèle de base 2 cm et de hauteur 1,5 cm sur le bord inférieur vers l'intérieur, et on le reporte sur le bord supérieur vers l'extérieur (translation verticale).

Expliquer pourquoi ce nouveau motif minimal pave exactement le plan par translations, et calculer son **aire exacte** ainsi que son **périmètre**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 9

**Analyse d'un pavage à motif minimal :** Dans le pavage semi-régulier d'Archimède $(3, 4, 6, 4)$, chaque hexagone régulier est entouré de 6 carrés et de 6 triangles équilatéraux.

On considère une **maille élémentaire** (motif minimal qui se répète par translations) contenant exactement 1 **hexagone régulier**, 3 **carrés** et 2 **triangles équilatéraux**, tous de côté $a = 2$ cm.

1. Calculer l'aire exacte de l'hexagone régulier (formé de 6 triangles équilatéraux de côté 2 cm), de chaque carré et de chaque triangle équilatéral.
2. En déduire l'aire totale de cette maille élémentaire du pavage $(3, 4, 6, 4)$.
3. Vérifier la cohérence du décompte : autour de chaque hexagone il y a 6 carrés partagés entre 2 hexagones $(6/2 = 3)$ et 6 triangles partagés entre 3 hexagones $(6/3 = 2)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 10

**Pavage par rotation autour des milieux (méthode de Escher) :**

On part d'un triangle équilatéral $ABC$ de côté 6 cm.

1. Sur le côté $[AB]$, on marque son milieu $M$. On trace une courbe quelconque allant de $A$ à $M$, puis on lui applique une **rotation de** $180°$ **autour de** $M$ pour obtenir l'autre moitié du côté allant de $M$ à $B$ (si la première moitié sort du triangle, la seconde rentre exactement d'autant).
2. On fait de même sur $[BC]$ autour de son milieu $N$, et sur $[CA]$ autour de son milieu $P$.

Expliquer quelles isométries permettent ensuite d'assembler ces tuiles déformées pour recouvrir tout le plan sans vide ni chevauchement, et donner l'aire de chaque tuile.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 11

Pour chaque isométrie, dire si elle **conserve** ou **inverse** l'orientation des figures (sens de parcours des sommets) :

1. une translation ;
2. une rotation ;
3. une symétrie centrale ;
4. une symétrie axiale.

Comment reconnaître, sur un pavage, qu'un motif a été obtenu par symétrie axiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 12

Deux droites $d_1$ et $d_2$ se coupent en $O$ en formant un angle de $30°$. On applique à un point $M$ la symétrie d'axe $d_1$, puis la symétrie d'axe $d_2$.

1. Quelle distance de $O$ conserve-t-on à chaque étape ?
2. Quelle transformation unique obtient-on ? Préciser son centre et son angle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 13

Dans un repère, on donne $A(1;0)$ et $B(4;2)$. On applique au point $M(0;0)$ la symétrie de centre $A$, puis la symétrie de centre $B$.

1. Calculer les coordonnées de $M_1$ puis de $M_2$.
2. Recommencer avec $N(2;5)$.
3. Quelle transformation unique permet de passer directement de $M$ à $M_2$ ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 14

1. Calculer l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un pentagone régulier et d'un hexagone régulier.
2. Expliquer pourquoi il n'existe que trois pavages réguliers du plan (avec un seul type de polygone régulier).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 15

Un pavage **semi-régulier** utilise plusieurs polygones réguliers, avec la même configuration à chaque sommet. On note par exemple $(4,8,8)$ : un carré et deux octogones autour de chaque sommet.

Vérifier que la somme des angles fait bien $360°$ pour les configurations suivantes :

1. $(4, 8, 8)$
2. $(3, 12, 12)$
3. $(3, 3, 3, 3, 6)$
4. $(3, 4, 6, 4)$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 16

Une frise est obtenue en répétant un motif par une translation de 5 cm vers la droite. Un point $P$ du premier motif est situé à 2 cm du bord gauche de la frise.

1. À quelle distance du bord gauche se trouve le point correspondant du 4$^{\text{e}}$ motif ?
2. Quel motif contient le point correspondant situé à 47 cm du bord ?
3. La frise mesure 1 m. Combien de motifs complets contient-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 17

Les traces de pas laissées dans le sable (pied gauche, pied droit, pied gauche…) sont un exemple de **symétrie glissée** : composée d'une symétrie axiale et d'une translation parallèle à l'axe.

1. Pourquoi une simple translation ne suffit-elle pas à passer d'une empreinte de pied gauche à l'empreinte suivante (pied droit) ?
2. Si deux empreintes gauches consécutives sont distantes de 1,2 m, quelle est la longueur de la translation de la symétrie glissée ?
3. Que donne la symétrie glissée appliquée deux fois ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 18

Dans un repère, on applique la rotation de centre $O$ et d'angle $90°$ dans le sens des aiguilles d'une montre : elle transforme $(x; y)$ en $(y; -x)$.

1. Donner l'image du triangle $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(1; 3)$.
2. Vérifier que $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$.
3. Quelle est l'image de $A$ après 4 rotations successives ? Après 7 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 19

Peut-on passer du triangle $T_1$ au triangle $T_2$ par une isométrie ? Justifier.

1. $T_1$ : côtés 3, 4, 5 ; $T_2$ : côtés 5, 3, 4.
2. $T_1$ : côtés 3, 4, 5 ; $T_2$ : côtés 3, 4, 6.
3. $T_1$ : côtés 6, 8, 10 ; $T_2$ : côtés 3, 4, 5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

## Exercice 20

Un motif est dessiné dans un carré. On construit un pavage en appliquant au carré des rotations de $90°$ autour de l'un de ses sommets $S$.

1. Combien de carrés obtient-on autour de $S$ avant de revenir au carré de départ ?
2. Le motif contient un point $P$ situé à 3 cm de $S$. À quelle distance de $S$ se trouvent ses images ?
3. Ces quatre images forment un quadrilatère. Lequel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 21

Trois hexagones réguliers identiques se rencontrent par leurs sommets. Les angles remplissent-ils le tour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 22

Quatre carrés côte à côte par leurs sommets peuvent-ils remplir le tour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 23

Peut-on remplir un sommet d'un pavage bord à bord avec des pentagones réguliers seuls ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 24

Combien de triangles équilatéraux identiques peut-on réunir par les sommets autour d'un point sans trou ni chevauchement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 25

Un motif est translaté de $(5, -2)$, puis de $(-3, 4)$. Donne le déplacement total.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 26

Une réflexion conserve-t-elle l'ordre horaire des sommets d'un triangle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 27

Que donnent deux rotations de $135°$ autour du même centre dans le même sens ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 28

Peut-on paver le plan avec des rectangles de $3 \times 5$ cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 29

Fais tourner un carré de $180°$ autour du milieu d'un côté. Comment touche-t-il le carré initial ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

### Exercice 30

Deux octogones réguliers et un carré arrivent à un même sommet. Vérifie la somme des angles.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site