Table des matières

Exercices corrigés de physique de 9e HarmoS **1**
Logique . . . 1
Stratégies . . . 6
Casse-têtes . . . 10
Multiples et diviseurs . . . 15
Nombres naturels et nombres premiers . . . 19
Systèmes de numération . . . 23
Codes secrets . . . 28
Congruences . . . 33
Polygones . . . 37
Isométries et pavages . . . 42
Ombre et lumière . . . 47
Réflexion . . . 52
Réfraction . . . 57

Exercices corrigés de physique de 9e HarmoS

Logique

Exercice 1

Quatre élèves — **Alice**, **Bastien**, **Chloé** et **David** — participent à une course de 100 m sans ex æquo. On dispose des trois indices suivants :

- Chloé est arrivée juste devant David.
- Bastien a devancé Alice, mais il n'est pas arrivé premier.
- David n'est pas arrivé dernier.

Retrouver le classement complet de la 1re à la 4e place.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Sur une île, chaque habitant est soit un **Véridique** (qui dit toujours la vérité), soit un **Menteur** (qui ment toujours).

Vous rencontrez deux habitants, **Léo** et **Mila**, qui font les déclarations suivantes :

- **Léo :** « Nous sommes tous les deux des Menteurs. »
- **Mila :** « Au moins l'un de nous deux est un Véridique. »

Déterminer si Léo et Mila sont des Véridiques ou des Menteurs.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Trois amis — **Inès**, **Jules** et **Kévin** — pratiquent chacun un sport différent (**escalade**, **natation**, **vélo**) et habitent chacun dans une ville différente (**Genève**, **Lausanne**, **Neuchâtel**).

À l'aide d'un tableau logique à double entrée, résoudre l'énigme grâce aux indices suivants :

1. Inès n'habite pas à Genève et ne fait pas de vélo.
2. La personne qui habite à Lausanne pratique la natation.
3. Kévin pratique l'escalade.
4. Jules n'habite pas à Neuchâtel.

Associer à chaque élève sa ville et son sport.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Un vase en verre a été brisé dans le laboratoire de physique. Quatre élèves présents dans la salle — **Nora**, **Omar**, **Paul** et **Quentin** — sont interrogés. Un seul d'entre eux a cassé le vase, et **un seul des quatre dit la vérité** (les trois autres mentent) :

- **Nora :** « C'est Omar qui a cassé le vase. »
- **Omar :** « C'est Quentin qui l'a cassé. »
- **Paul :** « Ce n'est pas moi ! »
- **Quentin :** « Omar ment quand il dit que c'est moi. »

Qui a cassé le vase et qui dit la vérité ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Un coffre-fort renferme un trésor caché dans l'un de trois coffrets : un coffret **d'Or**, un coffret **d'Argent** et un coffret **de Bronze**. Chaque coffret porte une inscription, et **une seule des trois inscriptions est vraie** :

- **Coffret d'Or :** « Le trésor est dans ce coffret. »
- **Coffret d'Argent :** « Le trésor n'est pas dans ce coffret. »
- **Coffret de Bronze :** « Le trésor n'est pas dans le coffret d'Or. »

Dans quel coffret se trouve le trésor ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Dans une classe de 30 élèves, chacun peut s'inscrire à l'atelier d'**Astronomie** (A), à l'atelier de **Robotique** (R), aux deux, ou à aucun des deux.

On sait que :

- 18 élèves participent à l'atelier d'Astronomie.
- 15 élèves participent à l'atelier de Robotique.
- 5 élèves ne participent à aucun de ces deux ateliers.

À l'aide d'un diagramme de Venn (ensembles logiques), déterminer :

1. Le nombre d'élèves inscrits à au moins un des deux ateliers.
2. Le nombre d'élèves inscrits aux **deux** ateliers à la fois.
3. Le nombre d'élèves inscrits **uniquement** à l'Astronomie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Sur l'île des Véridiques (qui disent toujours la vérité) et des Menteurs (qui mentent toujours), vous interrogez trois habitants : **Anne**, **Bruno** et **Claire**.

- **Anne :** « Bruno est un Menteur. »
- **Bruno :** « Claire est un Menteur. »
- **Claire :** « Anne et Bruno sont tous les deux des Menteurs. »

Retrouver la nature de chacun des trois habitants.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Quatre jeunes scientifiques — **Émilie**, **Fabien**, **Gaëlle** et **Hugo** — présentent chacun une expérience différente (**optique**, **électricité**, **magnétisme**, **acoustique**) dans une salle numérotée (1, 2, 3 ou 4).

Indices :

1. L'expérience d'optique a lieu dans une salle au numéro pair, mais pas la salle 2.
2. Gaëlle présente son expérience dans la salle 1.
3. Hugo ne travaille ni en électricité ni en acoustique.
4. L'expérience d'électricité a lieu dans la salle 2.
5. Émilie ne travaille ni en électricité ni en acoustique, et ne présente pas l'expérience d'optique.

Retrouver pour chaque scientifique son thème et le numéro de sa salle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un professeur montre à trois élèves (**Sami**, **Tania**, **Ugo**) un sac contenant 3 **chapeaux noirs** et 2 **chapeaux blancs**.

Il les aligne en file indienne dans l'obscurité, tous regardant dans la même direction : **Ugo** est derrière et voit Tania et Sami ; **Tania** est au milieu et voit uniquement Sami ; **Sami** est devant et ne voit personne. Le professeur place un chapeau sur la tête de chacun, range les deux chapeaux restants sans les montrer et rallume la lumière.

1. Le professeur demande à **Ugo** s'il connaît la couleur de son propre chapeau. Ugo réfléchit et répond : *« Non, je ne sais pas. »*
2. Il demande ensuite à **Tania**, qui a entendu la réponse d'Ugo. Tania répond à son tour : *« Non, je ne sais pas non plus. »*
3. Enfin, il demande à **Sami**, qui n'a vu aucun chapeau mais a entendu les deux réponses. Sami déclare immédiatement : *« Moi, je sais ! »*

Quelle est la couleur du chapeau de Sami, et comment a-t-il fait pour le déduire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Sur une île vivent trois types d'habitants :

- les **Véridiques** (disent toujours la vérité) ;
- les **Menteurs** (mentent toujours) ;
- les **Alternants** (alternent strictement entre vérité et mensonge : soit Vrai puis Faux, soit Faux puis Vrai).

Vous rencontrez trois habitants : **Paul**, **Quinn** et **Rose**. Vous savez qu'il y a **exactement un habitant de chaque type**. Chacun prononce deux phrases :

- **Paul :** (1) « Je suis l'Alternant. » — (2) « Quinn est le Menteur. »
- **Quinn :** (1) « Rose n'est pas la Véridique. » — (2) « Je suis le Véridique. »
- **Rose :** (1) « Paul est le Menteur. » — (2) « Je ne suis pas l'Alternant. »

Identifier le type exact de Paul, Quinn et Rose.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Sur l'île des Véridiques (qui disent toujours la vérité) et des Menteurs (qui mentent toujours), vous rencontrez deux habitants, **Arno** et **Béa**.

- Arno dit : « Béa est une Menteuse. »
- Béa dit : « Arno et moi sommes du même type. »

Déterminer le type de chacun.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Léa, Max et Zoé ont chacun un animal différent (chat, chien, lapin) et habitent chacun dans une ville différente (Berne, Genève, Lugano).

- Léa est allergique aux poils de chat et n'a donc pas de chat.
- Max n'a ni le chat, ni le lapin.
- La personne qui habite à Lugano a un chat.
- Max n'habite pas à Genève.

Qui possède quel animal, et qui habite où ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On admet la phrase : « **S'il pleut, alors Tom prend son parapluie.** »

Pour chaque situation, dire si l'on peut en déduire quelque chose avec certitude :

1. Il pleut.
2. Tom a pris son parapluie.
3. Tom n'a pas pris son parapluie.
4. Il ne pleut pas.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Écrire la **négation** de chacune des phrases suivantes :

1. « Tous les élèves de la classe ont réussi le test. »
2. « Il existe un nombre pair qui est premier. »
3. « Paul est grand et blond. »
4. « Ce soir, je lis ou je regarde un film. »

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Quatre amis comparent leurs âges :

- Anna est plus âgée que Ben.
- Chloé est plus jeune que Ben.
- David est plus âgé qu'Anna.

Classer les quatre amis du plus âgé au plus jeune.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Dans une classe de 28 élèves, 15 jouent au football, 12 jouent au basket et 5 pratiquent les deux sports.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Combien d'élèves jouent uniquement au football ? uniquement au basket ?
3. Combien d'élèves ne pratiquent aucun de ces deux sports ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un des quatre enfants a mangé le dernier biscuit. Interrogés, ils déclarent :

- **Alix :** « C'est Bruno. »

- **Bruno :** « C'est Diane. »
- **Céline :** « Ce n'est pas moi. »
- **Diane :** « Bruno ment. »

On sait qu'**un seul** des quatre dit la vérité. Qui a mangé le biscuit ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Quatre cartes ont une lettre sur une face et un nombre sur l'autre. On voit sur la table :

A	K	4	7

On veut vérifier la règle : « **Si une carte a une voyelle d'un côté, alors elle a un nombre pair de l'autre.** »

Quelles cartes faut-il retourner (et seulement celles-là) pour vérifier la règle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Sur l'île des Véridiques et des Menteurs, trois habitants A, B et C déclarent :

- A : « Nous sommes tous les trois des Menteurs. »
- B : « Exactement un d'entre nous est Véridique. »

Déterminer le type de chacun (C ne dit rien).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Pour chaque raisonnement, dire si la conclusion est **logiquement certaine** :

1. Tous les chats sont des mammifères. Tous les mammifères respirent. **Donc** tous les chats respirent.
2. Tous les poissons vivent dans l'eau. La baleine vit dans l'eau. **Donc** la baleine est un poisson.
3. Aucun reptile n'a de poils. Le lézard est un reptile. **Donc** le lézard n'a pas de poils.
4. Certains élèves aiment le ski. Certains élèves aiment la natation. **Donc** certains élèves aiment le ski et la natation.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Parmi les entiers de 1 à 18, combien sont divisibles par 2 ou par 3, mais pas par les deux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Nora affirme que les 3 lampes fonctionnent. Donne la négation logique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Quatre cartes montrent 6, 7, A et B, chacune avec un entier d'un côté et une lettre de l'autre. Pour vérifier « si A, alors nombre pair », quelles cartes retourner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un programme refuse toute mesure inférieure à 3. Une mesure a été acceptée. Quelle borne déduis-tu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un panier contient 3 valeurs positives et deux valeurs nulles. Réfute « toutes les valeurs sont strictement positives ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une bille est dans une seule des boîtes A, B, C. A est vide. Si B est vide, C est vide. Où est la bille ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Chaque dossier approuvé porte un tampon. Un dossier tamponné est-il certainement approuvé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un voyant s'allume si deux interrupteurs ont le même état. Donne les configurations d'allumage.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

A est avant B, C après B et D avant A. Classe les quatre lettres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Est-il possible que Nina soit à gauche de Léo, Léo à gauche de Zoé et Zoé à gauche de Nina sur une ligne ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Stratégies

Exercice 1

Vous disposez d'une source d'eau illimitée, d'un seau vide de 5 **L** et d'un seau vide de 3 **L** (aucun des deux n'est gradué).

Comment obtenir exactement 4 **L** d'eau dans le grand seau en un minimum de manipulations ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Sur les traces de Tartaglia : Un marchand possède une cruche pleine contenant 8 **L** d'huile, ainsi que deux cruches vides non graduées de 5 **L** et de 3 **L**.

Il souhaite partager équitablement les 8 L en deux parts exactes de 4 **L** sans perdre une seule goutte d'huile (aucune source extérieure disponible). Indiquer la suite des transvasements permettant d'y parvenir en 7 **transvasements** (ou moins).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Vous disposez d'un sablier de 7 **minutes** et d'un sablier de 4 **minutes**.

Comment mesurer avec exactitude une durée de 9 **minutes** (sans aucun autre instrument de mesure) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Comment mesurer exactement 15 **minutes** à l'aide d'un sablier de 7 **minutes** et d'un sablier de 11 **minutes** ?

Astuce : Réfléchissez à ce qu'on peut faire si l'on commence le chronométrage au moment où l'un des sabliers se vide, ou dès $t = 0$. Donnez la méthode la plus courte possible.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Vous disposez de 9 **billes** visuellement identiques. Huit ont exactement la même masse, et **une seule est légèrement plus lourde**.

À l'aide d'une **balance à deux plateaux** (sans poids marqués), comment identifier avec certitude la bille plus lourde en seulement 2 **pesées** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Un chimiste possède une balance à deux plateaux et souhaite pouvoir peser **toutes les masses entières de** 1 **g à** 13 **g** en utilisant seulement 3 **masses marquées**, sachant qu'il a le droit de placer ces masses **sur l'un ou l'autre plateau** (y compris du même côté que l'objet à peser).

Quelles valeurs doit-il choisir pour ses 3 masses marquées ? Montrer comment peser 2 g, 5 g, 7 g et 11 g.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Vous disposez de 12 **pièces d'or** d'apparence identique. Onze ont la même masse, mais **une seule est fausse** : vous ne savez pas si elle est **plus lourde ou plus légère** que les autres.

Expliquer comment identifier la fausse pièce **et** déterminer si elle est plus lourde ou plus légère en **au plus** 3 **pesées** sur une balance à deux plateaux.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Calculer astucieusement (sans calculatrice et sans poser de grandes multiplications) les expressions suivantes :

1. $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$
2. $A = 2\,026^2 - 2\,025^2$
3. $B = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{99\times100}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Trouver les deux termes suivants de chacune des quatre suites logiques ci-dessous en justifiant la règle de construction :

1. 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; ... ; ...
2. 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ... ; ...
3. 1 ; 11 ; 21 ; 1211 ; 111221 ; ... ; ...

4. 3 ; 6 ; 12 ; 15 ; 30 ; 33 ; ... ; ...

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Sur une table se trouvent 21 **allumettes**. Deux joueurs, **Lina** et **Matteo**, jouent à tour de rôle en retirant 1**,** 2 **ou** 3 **allumettes** à chaque tour. Celui qui prend la **dernière allumette** gagne la partie.

Lina joue en premier.

1. Combien d'allumettes Lina doit-elle prendre au premier coup pour s'assurer la victoire, quoi que joue Matteo ?
2. Quelle stratégie gagnante doit-elle ensuite appliquer à chacun de ses coups suivants ?
3. Que se passerait-il si l'on commençait avec 20 **allumettes** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Vous disposez d'une source d'eau illimitée, d'un récipient de 4 L et d'un récipient de 9 L (sans graduations).

Comment obtenir exactement 6 L d'eau dans le grand récipient ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Vous disposez d'un sablier de 5 minutes et d'un sablier de 3 minutes.

Comment mesurer exactement 7 minutes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On dispose de 8 pièces identiques en apparence, dont une seule est fausse et **plus légère** que les autres, et d'une balance à deux plateaux.

1. Montrer qu'on peut trouver la fausse pièce en **deux** pesées.
2. Pourquoi une seule pesée ne suffit-elle pas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un tiroir contient 10 chaussettes rouges et 10 chaussettes bleues mélangées. Il fait nuit noire, on ne voit pas les couleurs.

1. Combien de chaussettes faut-il prendre au minimum pour être **sûr** d'avoir une paire de même couleur ?
2. Combien pour être sûr d'avoir une paire **rouge** ?
3. Dans une classe de 13 élèves, est-on sûr que deux élèves sont nés le même mois ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un nénuphar double sa surface chaque jour. Il recouvre entièrement l'étang au bout de 30 jours.

1. Au bout de combien de jours recouvrait-il la moitié de l'étang ?
2. Au bout de combien de jours en recouvrait-il le quart ?
3. Si l'on avait mis deux nénuphars au départ, en combien de jours l'étang serait-il recouvert ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

On considère une grille de 2 lignes et 3 colonnes de petits carrés identiques.

1. Combien de rectangles (carrés compris) peut-on voir dans cette grille ?
2. Expliquer une méthode de comptage systématique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Lors d'une réunion, 10 personnes se serrent toutes la main une fois, deux à deux.

1. Combien de poignées de main sont échangées ?
2. Combien y en aurait-il avec n personnes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un fermier doit faire traverser une rivière à un loup, une chèvre et un chou. Sa barque ne peut transporter que lui et **un seul** de ces trois éléments. Il ne doit jamais laisser seuls le loup avec la chèvre, ni la chèvre avec le chou.

Proposer une suite de traversées permettant de tout faire passer. Combien de traversées faut-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Il y a 20 jetons sur une table. Deux joueurs retirent à tour de rôle 1 ou 2 jetons. **Celui qui prend le dernier jeton perd.**

1. Qui gagne s'il ne reste que 1 jeton à votre tour ? S'il en reste 2 ? 3 ? 4 ?
2. Quelles sont les positions perdantes (pour celui qui doit jouer) ?
3. Le premier joueur peut-il gagner à coup sûr ? Comment ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trouver le plus petit nombre entier qui :

- donne un reste de 1 quand on le divise par 2, par 3, par 4, par 5 ou par 6 ;
- est divisible par 7.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Deux joueurs retirent 1 à 3 jetons à tour de rôle. Le dernier jeton gagne. La pile en contient 18. Quel premier retrait permet de forcer le gain ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Trouve un numéro de 1 à 8 avec des questions oui/non. Combien suffisent dans le pire cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une pièce plus lourde est cachée parmi 9 pièces de même aspect. Comment la trouver en 2 pesées sur une balance à plateaux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On avance de 1 ou 2 cases par tour. Donne une plus courte suite pour atteindre 7 depuis zéro.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Parcours les 4 branches d'une étoile qui relient un centre à autant de culs-de-sac, en partant et revenant au centre. Minimum de passages d'arête ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Parmi 7 boutons, un seul ouvre une boîte. Combien de tests au pire pour identifier le bon, sans obligation de l'actionner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On ajoute 1 ou 3 au score, initialement nul. Comment atteindre 16 en un minimum de tours ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un jeu permet d'ajouter 4 ou 6 à un score initial de zéro. Peut-on atteindre exactement 19 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Dans une grille, avance de 3 colonnes vers l'est et de deux lignes vers le nord, une case par tour. Minimum de tours ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un code comporte deux chiffres distincts de 1 à 6. Un indice fiable fixe le premier à 2. Combien de codes restent à tester ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Casse-têtes

Exercice 1

On prend un échiquier classique de $8 \times 8 = 64$ cases et l'on découpe deux cases situées à deux **coins opposés** (par exemple le coin en haut à gauche et le coin en bas à droite). Il reste donc 62 cases.

Est-il possible de recouvrir exactement ces 62 cases restantes à l'aide de 31 **dominos** de dimension 2×1 sans qu'aucun domino ne dépasse ni ne chevauche un autre ? Justifier rigoureusement.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

On considère un carré de côté 4 cm formé de 16 petits carrés de 1×1 cm, auquel on retire un carré de 2×2 cm dans un coin, ce qui forme un **grand « L »** composé de trois carrés de 2×2 cm.

1. Quelle est l'aire totale de ce « L » ?

2. Comment découper ce grand « L » en 4 **pièces exactement identiques** (superposables par rotation ou translation) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Le paradoxe de Lewis Carroll : On découpe un carré de côté 8 cm (aire 64 cm^2) en 4 pièces :

- deux triangles rectangles identiques de côtés perpendiculaires 3 cm et 8 cm ;
- deux trapèzes rectangles identiques de bases 3 cm et 5 cm et de hauteur 5 cm.

En réassemblant ces 4 pièces, on semble former un rectangle de 5 cm sur 13 cm, dont l'aire vaut $5 \times 13 = 65$ cm^2 !

Expliquer rigoureusement d'où vient ce 1 **cm^2 supplémentaire** apparent.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Un tournoi d'échecs réunit 12 **joueurs**. Chaque joueur doit affronter **une seule fois** chacun des autres joueurs.

1. Combien de parties au total seront jouées durant le tournoi ?
2. Quel est le lien entre ce problème et le nombre de diagonales d'un polygone convexe à 12 côtés (un dodécagone) ? En déduire le nombre de diagonales d'un dodécagone.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Sur un plan quadrillé rectangulaire de 4 **pas vers l'Est** et 3 **pas vers le Nord**, un robot part du coin Sud-Ouest $A(0;0)$ pour rejoindre le coin Nord-Est $B(4;3)$.

Le robot ne peut se déplacer que d'**un pas vers l'Est** ou d'**un pas vers le Nord** (il effectue donc toujours un plus court chemin de longueur 7 pas).

Combien de chemins différents le robot peut-il emprunter pour aller de A à B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Sur un mini-échiquier de 4×4 **cases**, on veut placer 4 **reines** de sorte qu'aucune reine ne puisse en attaquer une autre (c'est-à-dire jamais deux reines sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale).

1. Expliquer pourquoi il n'existe aucune solution si l'on place une reine dans un coin (par exemple en haut à gauche).
2. Trouver les 2 **dispositions valides** possibles sur l'échiquier 4×4.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

On souhaite dessiner une **enveloppe ouverte** (un rectangle $ABCD$ dont on trace les deux diagonales AC et BD, surmonté sur son côté supérieur $[AB]$ d'un triangle ABE constituant le rabat ouvert) **d'un seul trait continu sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur le même segment**.

1. Compter le **degré** (nombre de segments aboutissant au sommet) de chacun des 5 sommets A, B, C, D, E.
2. D'après le théorème d'Euler sur les graphes, le tracé d'un seul trait est-il possible ? Si oui, par quel(s) sommet(s) faut-il obligatoirement commencer et finir ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Un **L-tromino** est une pièce formée de 3 carreaux carrés disposés en « L ». On dispose d'une grille carrée de 4×4 **cases** dont on a retiré une case quelconque (par exemple la case de la 2e ligne, 2e colonne).

1. Vérifier que le nombre de cases restantes est un multiple de 3.
2. Expliquer la méthode générale « diviser pour régner » qui permet de paver **n'importe quelle** grille 4×4 privée d'une case par des L-trominos, puis donner explicitement un pavage pour la case $(2, 2)$ manquante.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

On trace un grand triangle ABC. Depuis le sommet A, on trace 3 **segments** intérieurs qui joignent A à 3 points distincts du côté opposé $[BC]$. De plus, on trace 2 **segments** parallèles à (BC) qui coupent le grand triangle horizontalement à deux hauteurs différentes.

Combien de **triangles** au total (petits, moyens et grands) contient cette figure ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

On souhaite placer 8 **tours** d'échecs sur un échiquier 8×8 de sorte qu'aucune tour ne puisse en prendre une autre (ni sur une même ligne, ni sur une même colonne).

1. Combien de configurations différentes existe-t-il au total ?
2. On impose maintenant que **toutes les cases blanches de la grande diagonale principale** (allant du coin en haut à gauche au coin en bas à droite) restent vides. Quelle méthode simple permet de trouver un placement valide ? Donner un exemple.
3. À l'aide du **principe des tiroirs**, montrer que si l'on place 9 jetons quelconques dans une grille 4×4 découpée en 4 carrés 2×2, au moins un carré 2×2 contient au moins 3 **jetons**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Compléter le carré magique ci-dessous avec les nombres de 1 à 9 (chacun une seule fois), sachant que les sommes de chaque ligne, colonne et diagonale sont égales :

2	7	
	5	
		8

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Combien de carrés (de toutes tailles) peut-on compter dans une grille de 4×4 petits carrés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Dans une année **non bissextile**, le 1er mars tombe un lundi.

Quel jour de la semaine sera le 1er décembre de la même année ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Nina dit : « Dans 5 ans, j'aurai le double de l'âge que j'avais il y a 10 ans. »

Quel âge a Nina ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un escargot est au fond d'un puits de 10 m. Chaque jour, il grimpe de 3 m, mais chaque nuit, il glisse de 2 m.

Au bout de combien de jours sortira-t-il du puits ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

AB désigne un nombre de deux chiffres (A chiffre des dizaines, B chiffre des unités) et BA le nombre obtenu en inversant les chiffres. On sait que :

$$AB + BA = 121 \qquad \text{et} \qquad AB - BA = 27$$

Trouver le nombre AB.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On découpe une crêpe ronde avec des coupes rectilignes (sans déplacer les morceaux).

1. Quel est le nombre maximal de morceaux avec 1, 2 puis 3 coupes ?
2. Observer comment le nombre de morceaux augmente et en déduire le maximum avec 4 puis 5 coupes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On veut paver un rectangle de 2 cases de haut et n cases de long avec des dominos de 2 cases (posés horizontalement ou verticalement).

1. Combien y a-t-il de pavages pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$?
2. Expliquer pourquoi le nombre de pavages pour n est la somme des nombres de pavages pour $n - 1$ et $n - 2$.
3. En déduire le nombre de pavages pour $n = 4$ et $n = 6$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Quatre randonneurs doivent traverser un pont de nuit. Le pont ne supporte que 2 personnes à la fois, et ils n'ont qu'**une seule lampe**, indispensable pour traverser (il faut la rapporter). Ils mettent respectivement 1, 2, 5 et 10 minutes pour traverser ; à deux, ils avancent à la vitesse du plus lent.

Trouver une stratégie qui permet à tout le groupe de traverser en 17 minutes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trois boîtes contiennent l'une des pommes, l'autre des oranges et la troisième un mélange de pommes et d'oranges. Elles portent les étiquettes « Pommes », « Oranges » et « Mélange », mais **toutes les étiquettes sont fausses**.

En ne tirant qu'**un seul fruit** d'une seule boîte (sans regarder dedans), comment rétablir les bonnes étiquettes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un damier de 10 par 10 cases perd une case. Peut-on couvrir le reste exactement avec des dominos de deux cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Insère les signes $+$, $-$ ou $\times$ pour faire 23 avec, dans l'ordre, 5, 4, 2 et 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Avec les chiffres 1, 2 et 5 utilisés une fois par nombre, donne la plus grande différence entre deux nombres de trois chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un cube peint sur ses faces est découpé en $5 \times 5 \times 5$ petits cubes. Combien ont trois faces peintes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Apparie les nombres de 1 à 10 pour que toutes les paires aient la même somme.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien de carrés de 2×2 cases contient une grille de 5×5 cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un escargot monte de 5 m par jour et redescend de 3 m par nuit. Quand sort-il d'un puits de 11 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Deux pages en vis-à-vis ont des numéros consécutifs qui totalisent 45. Quels numéros ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une suite commence par 5, 7, 11, 17 et ajoute des nombres pairs consécutifs. Trouve le terme suivant.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Peut-on écrire 11 comme somme de quatre entiers impairs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Multiples et diviseurs

Exercice 1

On considère le nombre à quatre chiffres $N = \overline{5a4b}$, où a est le chiffre des centaines et b celui des unités.

1. Trouver toutes les paires $(a; b)$ pour lesquelles N est divisible à la fois par 5 et par 9.
2. Parmi ces nombres, lequel est en plus divisible par 4 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Justification et application des critères de divisibilité :

1. En écrivant tout entier $N = 100q + r$ (où $r = \overline{du}$ est le nombre formé par ses deux derniers chiffres), expliquer pourquoi N est divisible par 4 si et seulement si $\overline{du}$ est divisible par 4.
2. À l'aide du **critère de divisibilité par** 11 (différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair), vérifier si $M = 84\,915$ est divisible par 11.
3. Par quel chiffre faut-il remplacer le chiffre des dizaines (1) dans $M = 84\,915$ pour que le nombre obtenu soit divisible par 11 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

1. Dresser la liste complète et ordonnée de tous les **diviseurs de** 72 et de tous les **diviseurs de** 108.
2. En déduire tous les **diviseurs communs** à 72 et 108, puis préciser leur PGDC.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

1. Utiliser l'**algorithme d'Euclide** (par divisions euclidiennes successives) pour calculer le PGDC$(1\,071; 462)$.
2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{462}{1\,071}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Un laboratoire de physique possède un sol rectangulaire de 630 **cm** de longueur sur 495 **cm** de largeur. On souhaite le recouvrir entièrement à l'aide de **dalles carrées identiques** de côté entier c (en cm), sans aucune découpe et en utilisant les dalles **les plus grandes possibles**.

1. Quelle doit être la longueur c du côté d'une dalle ?
2. Combien de dalles faudra-t-il commander au total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Sur un banc d'optique automatisé, deux balises lumineuses clignotent périodiquement :

- la balise **rouge** s'allume toutes les 18 **secondes** ;
- la balise **bleue** s'allume toutes les 24 **secondes** ;
- une troisième balise **verte** s'allume toutes les 30 **secondes**.

À 14 h 00 min 00 s, les trois balises s'allument ensemble.

1. Au bout de combien de secondes les trois balises se rallumeront-elles simultanément pour la prochaine fois ?
2. Quelle heure sera-t-il exactement à cet instant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Engrenages : Un mécanisme d'horlogerie est composé de deux roues dentées qui s'engrènent :

- la petite roue A possède 28 **dents** ;
- la grande roue B possède 42 **dents**.

Au départ, on trace un repère rouge sur deux dents en contact.

1. Combien de dents doivent défiler au point de contact pour que les deux repères rouges se retrouvent exactement face à face pour la première fois ?
2. Combien de **tours complets** chaque roue aura-t-elle effectués à ce moment-là ?
3. On ajoute une troisième roue C de 35 **dents** engrenée avec B. Au bout de combien de tours de A, B et C les trois repères alignés au départ reviennent-ils simultanément en position initiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Alignement de satellites : Trois satellites d'observation S_1, S_2 et S_3 tournent autour de la Terre dans le même plan équatorial et dans le même sens, avec des périodes orbitales respectives de :

- $T_1 = 90$ minutes pour S_1 ;
- $T_2 = 120$ minutes pour S_2 ;
- $T_3 = 150$ minutes pour S_3.

À l'instant $t = 0$, les trois satellites sont parfaitement alignés au-dessus d'une même station au sol.

1. Au bout de combien de **minutes**, puis d'**heures**, les trois satellites retrouveront-ils **exactement ce même alignement au-dessus de la station** ?
2. Combien de révolutions complètes chaque satellite aura-t-il accomplies durant cet intervalle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un collectionneur range ses billes de verre (il en possède entre 220 **et** 300).

- S'il les regroupe par 6, il lui en reste 5.
- S'il les regroupe par 8, il lui en reste 7.
- S'il les regroupe par 9, il lui en reste 8.

Combien de billes possède-t-il exactement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

On rappelle la propriété fondamentale liant deux entiers naturels non nuls a et b :

$$\text{PGDC}(a;b) \times \text{PPMC}(a;b) = a \times b$$

1. Vérifier cette formule pour $a = 24$ et $b = 36$.
2. Deux entiers naturels a et b (avec $a < b$) ont pour $\text{PGDC}(a;b) = 12$ et pour $\text{PPMC}(a;b) = 360$. Retrouver **tous les couples** $(a;b)$ **possibles**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Critère de divisibilité par 7 : on écrit $N = 10a + b$ où b est le chiffre des unités. Alors N est divisible par 7 si et seulement si $a - 2b$ est divisible par 7.

Tester ce critère sur 343, 1 001, 2 023 et 524.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

1. Calculer PGDC$(1\,260 ; 924)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{924}{1\,260}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Deux roues dentées s'engrènent : la roue A a 36 dents et la roue B en a 48. On marque d'un point rouge les deux dents en contact au départ.

1. Après combien de dents engrenées les deux points rouges se retrouvent-ils en contact pour la première fois ?
2. Combien de tours chaque roue a-t-elle alors effectués ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Deux pendules oscillent : le premier a une période de 1,2 s, le second de 1,8 s. On les lâche en même temps depuis la même position.

1. Au bout de combien de temps repasseront-ils ensemble par leur position de départ ?
2. Combien d'oscillations chacun aura-t-il effectuées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

1. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs $n(n+1)$ est toujours pair.
2. Montrer que le produit de trois entiers consécutifs $n(n+1)(n+2)$ est toujours divisible par 6.
3. Vérifier sur $n = 7$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Problème chinois (Sunzi, IIIe siècle) : un général compte ses soldats.

- Rangés par 3, il en reste 2.
- Rangés par 5, il en reste 3.
- Rangés par 7, il en reste 2.

1. Trouver le plus petit nombre de soldats possible.
2. Sachant qu'il y a entre 100 et 200 soldats, combien sont-ils ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Trouver tous les nombres de deux chiffres égaux à 4 fois la somme de leurs chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

1. Montrer que tous les nombres 9, 99, 999, 9 999, … (de la forme $10^n - 1$) sont divisibles par 9.
2. Montrer que tous les nombres 12, 102, 1 002, 10 002, … (de la forme $10^n + 2$) sont divisibles par 3 et par 2, donc par 6.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

En Amérique du Nord, certaines cigales passent 13 ans ou 17 ans sous terre avant d'émerger toutes ensemble.

1. Si une espèce de 13 ans et une espèce de 17 ans émergent la même année, dans combien d'années émergeront-elles de nouveau en même temps ?
2. Un prédateur a un cycle de vie de 2, 3, 4 ou 6 ans. Montrer que, si les cigales avaient un cycle de 12 ans, elles rencontreraient ce prédateur à chaque émergence.
3. Avec un cycle de 13 ans, tous les combien d'années rencontreraient-elles un prédateur au cycle de 4 ans ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

1. Combien de diviseurs possède 144 ?
2. Quel est le plus petit entier qui possède exactement 6 diviseurs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Trouve les multiples communs de 4 et 6 entre 181 et 205, bornes incluses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Donne tous les diviseurs positifs de 36.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Remplace l'unité de 1141 pour rendre le nombre divisible par 9. Donne toutes les possibilités.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Sans effectuer la division, décide si 18128 est divisible par 4 et s'il est divisible par 8.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un paquet de 120 cartes doit être partagé entre 29 élèves en parts égales. Combien de cartes restent après avoir donné le maximum à chacun ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Énumère les paires de dimensions entières d'un rectangle de 120 cm², à rotation près.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Le nombre 365 peut-il être à la fois multiple de 5 et multiple de 10 ? Justifie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un nombre laisse un reste de 2 quand on le divise par 36. Quel est son reste si on lui ajoute 71 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Trouve le plus petit multiple de 7 strictement supérieur à 123.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un entier est divisible par 36 et par 5. Doit-il être divisible par 180 ? Donne une justification.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Nombres naturels et nombres premiers

Exercice 1

Crible d'Ératosthène :

1. Pourquoi le nombre 1 n'est-il pas considéré comme un nombre premier ?
2. Dresser la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 60.
3. Pour tester si 89 est premier, jusqu'à quel nombre premier suffit-il de vérifier la divisibilité ? Justifier et conclure sur 89.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Décomposer les entiers suivants en **produit de facteurs premiers** (en regroupant les facteurs identiques sous forme de puissances) :

1. $A = 360$
2. $B = 1\,260$
3. $C = 2\,310$
4. En déduire PGDC$(A; B)$ et PPMC$(A; B)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Soit $N = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$.

1. Tout diviseur de N s'écrit sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$. Quelles sont les valeurs possibles pour chacun des exposants a, b et c ?
2. En déduire le **nombre total de diviseurs** de 360.
3. Combien de diviseurs possède le nombre $M = 1\,800$?
4. Trouver le plus petit entier naturel non nul possédant exactement 12 **diviseurs**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

On considère l'entier $N = 180$.

1. Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul k tel que $180 \times k$ soit un **carré parfait** ? Préciser la racine carrée de ce carré parfait.
3. Quel est le plus petit entier naturel non nul m tel que $180 \times m$ soit un **cube parfait** ? Préciser la racine cubique de ce cube parfait.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Sur les traces d'Euclide (infinité des nombres premiers) :

Pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers, Euclide multiplie les premiers nombres premiers connus et ajoute 1. On définit $E_n = (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n) + 1$.

1. Calculer $E_1 = 2+1$, $E_2 = (2\times 3)+1$, $E_3 = (2\times 3\times 5)+1$ et $E_4 = (2\times 3\times 5\times 7)+1$. Sont-ils tous premiers ?
2. Calculer $E_6 = (2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13)+1$. Sachant que $E_6 = 59\times 509$, E_6 est-il premier ?
3. Expliquer pourquoi, même lorsque E_n n'est pas premier, il possède obligatoirement un diviseur premier **différent** de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

1. On appelle **nombres premiers jumeaux** deux nombres premiers dont la différence vaut 2 (comme 3 et 5). Trouver toutes les paires de nombres premiers jumeaux inférieures à 50.
2. Expliquer pourquoi $3, 5, 7$ est le **seul triplet** de nombres premiers de la forme $(p; p+2; p+4)$.
3. À l'inverse, on peut trouver de longues suites d'entiers consécutifs **tous composés** (non premiers) : donner un exemple de 5 **entiers consécutifs tous composés** (par exemple entre 20 et 30, ou à l'aide des factorielles).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

La conjecture de Goldbach (1742) affirme que *« tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers »*. Ce problème célèbre n'est toujours pas démontré aujourd'hui.

1. Vérifier la conjecture pour 28 et 46 en trouvant **toutes** les façons possibles de les écrire comme somme de deux nombres premiers (à l'ordre des termes près).
2. Trouver toutes les décompositions de Goldbach pour 100.
3. Donner au moins une décomposition de Goldbach pour 2 026 (on donne que 1 997 et 2 003 sont premiers).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

1. **Conjecture faible de Goldbach** (démontrée par Harald Helfgott en 2013) : *« Tout nombre entier impair supérieur ou égal à 7 peut s'écrire comme la somme de trois nombres premiers. »*
   - Écrire 17, 35 et 51 comme somme de trois nombres premiers.
2. Montrer que si la conjecture *forte* de Goldbach (question précédente) est vraie pour tout nombre pair ≥ 4, alors la conjecture *faible* est automatiquement vraie pour tout nombre impair ≥ 7.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un entier naturel est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (tous ses diviseurs sauf lui-même).

1. Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
2. Euclide a montré que si $2^p - 1$ est un **nombre premier** (appelé *nombre premier de Mersenne*), alors $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.
   - Calculer le nombre parfait obtenu pour $p = 5$.
3. On teste $p = 11$: $2^{11} - 1 = 2\,047$. Ce nombre de Mersenne est-il premier ? (Tester sa divisibilité par 23.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

La conjecture de Syracuse (ou de Collatz) : On part d'un entier naturel $n \geq 1$ et l'on construit une suite selon la règle :

- si n est **pair**, le terme suivant vaut $n \div 2$;
- si n est **impair**, le terme suivant vaut $3n + 1$.

1. Calculer le « vol » complet (jusqu'à atteindre 1) en partant de $n = 11$, puis de $n = 27$ (seulement les 10 premiers termes pour 27).
2. Pour $n = 11$, quel est le **temps de vol** (nombre d'étapes pour arriver à 1) et quelle est l'**altitude maximale** atteinte ?
3. Que se passe-t-il une fois que la suite atteint 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Parmi les nombres 221, 223, 227 et 229, lesquels sont premiers ? Justifier en précisant jusqu'à quel nombre premier il suffit de tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On appelle **nombres de Mersenne** les nombres $M_n = 2^n - 1$.

1. Calculer M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 et M_7. Lesquels sont premiers ?
2. On constate que si n n'est pas premier, M_n ne l'est pas. Que dire de la réciproque ? Tester $M_{11} = 2\,047$ avec le diviseur 23.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

1. Décomposer 720 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire le nombre de ses diviseurs.
3. Combien de ses diviseurs sont impairs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Le mathématicien Leonhard Euler a remarqué que l'expression $P(n) = n^2 + n + 41$ donne souvent des nombres premiers.

1. Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
2. Calculer $P(40)$. Ce nombre est-il premier ?
3. Que retenir de cet exemple ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

1. Écrire les nombres premiers entre 5 et 50 et calculer, pour chacun, le reste de sa division par 6. Que remarque-t-on ?
2. Expliquer pourquoi tout nombre premier supérieur à 3 s'écrit $6k + 1$ ou $6k + 5$.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Donner la liste de tous les nombres premiers compris entre 100 et 130.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Euclide a montré qu'il existe une infinité de nombres premiers en multipliant des nombres premiers et en ajoutant 1.

1. Calculer $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$.
2. Vérifier que $N = 59 \times 509$. N est-il premier ?
3. Pourquoi aucun des nombres $2, 3, 5, 7, 11, 13$ ne divise-t-il N ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

1. Décomposer $7\,056$ en produit de facteurs premiers.
2. En déduire $\sqrt{7\,056}$ sans calculatrice.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On donne $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 7$.

1. Calculer a et b.
2. Déterminer $\text{PGDC}(a; b)$ et $\text{PPMC}(a; b)$ sous forme de produits de facteurs premiers, puis en écriture décimale.
3. Vérifier que $\text{PGDC} \times \text{PPMC} = a \times b$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

1. Calculer $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$.
2. Montrer que les cinq nombres consécutifs $6! + 2$, $6! + 3$, $6! + 4$, $6! + 5$, $6! + 6$ ne sont pas premiers.
3. Comment obtenir 100 nombres consécutifs non premiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Décide si 113 est premier en limitant le nombre de divisions à tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Réfute l'affirmation « 133 est premier » à l'aide d'une égalité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Décompose 360 en facteurs premiers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Liste les nombres premiers compris entre 49 et 69, bornes incluses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Donne un composé impair dont le plus petit facteur premier est 13.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien de diviseurs positifs possède 676 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Quel est le plus petit entier par lequel multiplier 26 pour obtenir un carré parfait ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Trouve deux nombres premiers dont le produit est 1469.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Parmi 13, 169 et 27, quels nombres sont premiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une étiquette indique que 360 a exactement deux facteurs premiers distincts. Contrôle l'étiquette.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Systèmes de numération

Exercice 1

Système de numération égyptien : Dans l'Égypte antique, on utilise un système additif en base 10 où chaque puissance de 10 est représentée par un hiéroglyphe :

- B (bâton) $= 1$
- A (anse) $= 10$
- S (spirale) $= 100$
- L (fleur de lotus) $= 1\,000$
- D (doigt) $= 10\,000$

1. Convertir en écriture décimale le nombre noté : $DD\ LLL\ SSSS\ AA\ BBBBB$.
2. Écrire le nombre $14\,632$ avec ces symboles.
3. Additionner directement $(L\ SSSS\ AAAAA\ BBB) + (L\ SSSSSS\ AAAAAA\ BBBBBBBB)$ en effectuant les regroupements (retenues par paquets de 10) et donner le résultat en écriture égyptienne puis décimale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

La multiplication égyptienne : Les scribes égyptiens effectuaient les multiplications sans connaître les tables, uniquement par **doublements successifs** (multiplication par 2) et additions.

Pour calculer 23×37, on construit le tableau des doubles de 37 :

Puissance de 2	Double de 37
1	37
2	74
4	148
8	296
16	592

1. Décomposer 23 en somme de puissances de 2 figurant dans la colonne de gauche, puis en déduire 23×37.
2. Appliquer la même méthode pour calculer 41×29.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Système babylonien (base 60) : Les Babyloniens utilisaient un système positionnel en **base** 60 (sexagésimal). On note ici chaque « chiffre » babylonien (de 0 à 59) séparé par un point-virgule, par exemple $(2\,;\,15)_{60} = 2 \times 60^1 + 15 \times 60^0$.

1. Convertir en base 10 les nombres babyloniens suivants :
   - $A = (4\,;\,25)_{60}$
   - $B = (1\,;\,12\,;\,35)_{60}$
2. Convertir en écriture babylonienne (base 60) les entiers décimaux suivants :
   - $C = 500$
   - $D = 7\,580$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Héritage du système sexagésimal (durées et angles) :

1. Une expérience d'astronomie dure 2 h 47 min 38 s, suivie d'une deuxième phase de 1 h 28 min 45 s. Quelle est la durée totale ?
2. Dans un triangle, deux angles mesurent respectivement $\alpha = 48^\circ\,37'\,50''$ et $\beta = 73^\circ\,45'\,25''$ (en degrés, minutes d'arc et secondes d'arc, où $1^\circ = 60'$ et $1' = 60''$). Calculer la mesure du troisième angle γ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Système binaire (base 2) :

1. Convertir en base 10 les nombres binaires suivants :
   - $(101101)_2$
   - $(11111111)_2$
2. Convertir en binaire (base 2) les entiers décimaux suivants :
   - 43
   - 156

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Opérations directement en base 2 :

1. Poser et calculer l'addition binaire : $(101101)_2 + (11011)_2$, puis vérifier le résultat en base 10.
2. Poser et calculer la multiplication binaire : $(1101)_2 \times (101)_2$, puis vérifier en base 10.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Informatique : octets et système hexadécimal (base 16) — En base 16, on utilise les chiffres 0 à 9 puis les lettres $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$.

1. Convertir l'octet $(1101\,0110)_2$ en base 16, puis en base 10.
2. En codage web RGB, une couleur est définie par trois octets en hexadécimal. Convertir la composante rouge `A5` et la composante verte `3F` de `#A53F00` en base 10 et en binaire (8 bits).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Bases fictives : Sur la planète *Pentaria*, les habitants n'ont qu'une main à 5 doigts et comptent en **base** 5.

1. Convertir notre nombre décimal 189 en base 5.
2. Convertir le nombre pentarien $(342)_5$ en base 10.
3. Effectuer directement en base 5 l'addition : $(342)_5 + (234)_5$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un archéologue retrouve une tablette provenant d'une civilisation inconnue comptant dans une certaine **base** b (avec $b > 4$). Sur la tablette figure l'addition suivante :

$$(34)_b + (23)_b = (101)_b$$

1. En traduisant cette égalité en base 10, déterminer la **base** b utilisée.
2. Dans cette même base b, calculer la multiplication $(24)_b \times (13)_b$ et donner le résultat en base b puis en base 10.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

1. Convertir en écriture décimale les nombres romains suivants : `MCMXCIX` et `MMCDXLIV`.
2. Écrire `2026` et `1984` en chiffres romains.
3. Expliquer en deux points pourquoi un système **positionnel avec zéro** (comme notre système indo-arabe ou le système binaire) est bien plus efficace pour calculer qu'un système **additif** (égyptien ou romain).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

1. Convertir en base 10 : $(110011)_2$ et $(1000000)_2$.
2. Convertir en base 2 : 45 et 100.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

1. Convertir $(243)_5$ en base 10.
2. Convertir 100 et 73 en base 5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

En base 16 (hexadécimal), on utilise les chiffres 0 à 9 puis $A = 10$, $B = 11$, …, $F = 15$.

1. Convertir $(2F)_{16}$ et $(FF)_{16}$ en base 10.
2. Convertir 200 en base 16.

3. Sur un site web, une couleur s'écrit $\#FF8000$: les trois paires indiquent le rouge, le vert et le bleu (de 0 à 255). Donner ces trois valeurs.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

1. Convertir en nombres romains : 1 449 et 3 888.
2. Convertir en écriture décimale : CDXCIV.
3. Pourquoi le système romain n'est-il pas pratique pour poser des additions ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Les Mayas comptaient en base 20. On écrit un nombre maya sous la forme $(a; b; c)_{20}$, où c est le chiffre des unités, b celui des « vingtaines » et a celui des « quatre-centaines ».

1. Convertir $(1; 5; 12)_{20}$ en base 10.
2. Convertir 2 026 en base 20.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

1. Convertir $(157)_8$ (base 8, dite octale) en base 10.
2. Sous Linux, les droits d'un fichier s'écrivent avec trois chiffres octaux, par exemple 755. Chaque chiffre s'écrit en binaire sur 3 bits correspondant à : lecture (r), écriture (w), exécution (x). Traduire 755 en binaire puis en droits.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Les Babyloniens écrivaient les nombres en base 60. Une tablette célèbre (YBC 7289) donne une approximation de $\sqrt{2}$:

$$1; 24, 51, 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

1. Calculer la valeur décimale de cette approximation (à 10^{-6} près).
2. Comparer avec $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Effectuer les opérations suivantes directement en base 2, puis vérifier en base 10 :

1. $(1011)_2 + (111)_2$
2. $(1101)_2 \times (11)_2$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

En levant ou baissant chacun de ses doigts, on peut compter en binaire (doigt levé = 1, doigt baissé = 0).

1. Jusqu'à quel nombre peut-on compter avec une main (5 doigts) ?
2. Et avec les deux mains (10 doigts) ?
3. Combien de doigts faut-il au minimum pour compter jusqu'à 2 026 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Dans une base b inconnue, on a l'égalité $(121)_b = 49$.

1. Écrire $(121)_b$ en fonction de b.
2. Trouver b.
3. Que vaut $(121)_b$ dans n'importe quelle base ? Le justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

En base 2, écris 13 avec les poids 8, 4, 2 et 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Convertis 10110 de la base 2 à la base 10.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Convertis 304 de la base 5 à la base 10.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Convertis 34 de la base 10 à la base 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Additionne les nombres binaires 101 et 11. Garde le résultat en binaire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Le chiffre 6 peut-il apparaître dans un nombre écrit en base 6 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

En base entière b $\geq$ 2, quelle est la valeur décimale du nombre écrit 10 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Convertis 31 de la base 10 à la base 16, avec A = 10 à F = 15.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Quel est l'effet sur la valeur si on ajoute un zéro à droite de 23 en base 5 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Convertis les nombres 17 et 20 de la base 8 à la base 10. De combien diffèrent-ils ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Codes secrets

Exercice 1

Chiffre de César : On numérote les 26 lettres de l'alphabet de 0 (`A`) à 25 (`Z`). Chiffrer avec une clé k consiste à décaler chaque lettre de k rangs vers la droite modulo 26 : $C \equiv (M + k) \pmod{26}$.

1. Chiffrer le mot **`PHYSIQUE`** avec la clé $k = 5$.
2. Déchiffrer le message **`HTWWNLJ`**, sachant qu'il a été chiffré avec la même clé $k = 5$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Vous interceptez le message chiffré suivant, codé par un chiffre de César avec une **clé k inconnue** :

```
UN LQROOAN MN LNBJA NBC BRVYUN
```

1. En français, quelle est la lettre la plus fréquente ? Repérer la lettre qui apparaît le plus souvent dans ce message chiffré.
2. En déduire la clé de décalage k, puis décoder intégralement le message.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Un **chiffrement affine** transforme le rang $x \in \{0, \dots, 25\}$ d'une lettre en $y \equiv a \cdot x + b \pmod{26}$.

1. Avec la fonction $y \equiv 3x + 4 \pmod{26}$, chiffrer le mot **`BANC`**.
2. Pourquoi ne peut-on **jamais** choisir $a = 2$ (par exemple $y \equiv 2x + 4 \pmod{26}$) pour fabriquer un code secret ? Tester sur les lettres `A` (0) et `N` (13).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Code de Vigenère (chiffrement) : Contrairement au chiffre de César qui applique toujours le même décalage, le code de Vigenère utilise un **mot-clé répété** sous le message. Chaque lettre du mot-clé donne le décalage à appliquer ($A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$).

Chiffrer le mot **`OPTIQUE`** à l'aide de la clé **`LUX`**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Code de Vigenère (déchiffrement) :

1. Déchiffrer le message **`HFTKAP`**, chiffré par le code de Vigenère avec la clé **`SOL`**.
2. Expliquer pourquoi la lettre `A` du texte chiffré (`HFTK A P`) et la lettre `T` (`HF T KAP`) ne proviennent pas de la même lettre ni du même décalage, ce qui protège ce code contre une attaque fréquentielle simple.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Chiffrement par transposition (scytale) : Au lieu de remplacer les lettres, on change leur ordre. On écrit un message sans espaces dans un tableau de 4 **lignes et** 5 **colonnes** (ligne par ligne), puis on le lit **colonne par colonne** (de haut en bas, puis de gauche à droite) pour former le message chiffré.

Déchiffrer le message suivant de 20 lettres : > `VSAEIELRTDUEEEMXSLIX`

(Les `X` à la fin servent uniquement à compléter la dernière ligne.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Grille tournante (grille de Fleissner) : On utilise un pochoir carré 4×4 percé de 4 trous aux cases de coordonnées `(ligne, colonne)` suivantes (numérotées de 1 à 4 de haut en bas et de gauche à droite) :

- $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$ et $(3,1)$.

Pour chiffrer un message de 16 lettres, on pose la grille sur une feuille 4×4, on écrit les 4 premières lettres dans les trous (ligne par ligne, de gauche à droite), puis on fait tourner la grille d'un **quart de tour** ($90°$) **dans le sens horaire** et on écrit les 4 lettres suivantes, et ainsi de suite.

1. Vérifier qu'au bout de 4 positions ($0°, 90°, 180°, 270°$), aucune case n'est utilisée deux fois.
2. Déchiffrer le message inscrit dans la grille finale ci-dessous :

S	I	O	L
F	L	B	I
E	O	L	R
R	L	T	E

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Masque binaire (ou exclusif XOR) : En cryptographie moderne, on travaille sur des bits (0 et 1) à l'aide de l'opération **XOR** (notée $\oplus$), définie par :

$$0 \oplus 0 = 0 \quad ; \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad ; \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad ; \quad 1 \oplus 1 = 0$$

On code chaque lettre par son rang ($A = 0, B = 1, \ldots, Z = 25$) écrit en binaire sur 5 **bits**.

1. Sachant que `L` $= 11 = (01011)_2$, `U` $= 20 = (10100)_2$ et `X` $= 23 = (10111)_2$, chiffrer le mot **`LUX`** avec la clé binaire `00010 01011 00100` (qui correspond à `CLE`).
2. Expliquer pourquoi l'opération de déchiffrement est **strictement identique** à celle du chiffrement (calculer $(M \oplus K) \oplus K$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Initiation à la cryptographie asymétrique (échange de clé de Diffie–Hellman) :

Alice et Bob veulent fabriquer un **code secret commun** en communiquant uniquement sur un canal public où un espion écoute tout. Ils choisissent publiquement les nombres $p = 23$ et $g = 5$.

- **Alice** choisit secrètement $a = 6$, calcule $A \equiv 5^6 \pmod{23}$ et l'envoie publiquement à Bob.
- **Bob** choisit secrètement $b = 4$, calcule $B \equiv 5^4 \pmod{23}$ et l'envoie publiquement à Alice.

1. Calculer les valeurs publiques A et B envoyées par Alice et Bob.
2. Alice calcule ensuite $K_A \equiv B^a \pmod{23}$ et Bob calcule $K_B \equiv A^b \pmod{23}$. Vérifier qu'ils obtiennent la **même clé secrète** K.

3. Pourquoi l'espion qui connaît p, g, A, B a-t-il du mal à retrouver K lorsque p est un très grand nombre premier (de plusieurs centaines de chiffres) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Initiation au principe du chiffrement RSA :

Pour créer ses clés RSA, Alice choisit deux nombres premiers $p = 3$ et $q = 11$.

1. Calculer le module public $n = p \times q$ et l'indicateur d'Euler $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
2. Alice choisit comme exposant de chiffrement $e = 3$ et comme exposant secret $d = 7$. Vérifier que la condition clé du système RSA est satisfaite : $e \times d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.
3. Bob veut envoyer le message secret $M = 5$ à Alice en utilisant la **clé publique** $(n; e) = (33; 3)$. Calculer le message chiffré $C \equiv M^e \pmod{n}$.
4. À l'aide de sa **clé privée** $d = 7$, Alice déchiffre en calculant $C^d \pmod{33}$. Vérifier étape par étape qu'elle retrouve bien $M = 5$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un message a été chiffré par le chiffre de César avec une clé $k = 3$ (chaque lettre est décalée de 3 rangs vers la droite dans l'alphabet).

1. Déchiffrer le message `PDWKV`.
2. Chiffrer le mot `ZERO` avec la même clé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Le **code Atbash** (utilisé dans l'Antiquité) remplace chaque lettre par sa « symétrique » dans l'alphabet : `A` $\leftrightarrow$ `Z`, `B` $\leftrightarrow$ `Y`, `C` $\leftrightarrow$ `X`, etc. En numérotant les lettres de 0 (`A`) à 25 (`Z`), la lettre de rang x devient celle de rang $25 - x$.

1. Chiffrer le mot `SOLEIL`.
2. Que se passe-t-il si l'on chiffre deux fois un message ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

En français, la lettre la plus fréquente est le `E`. Dans un long texte chiffré avec le chiffre de César, on constate que la lettre la plus fréquente est le `I`.

1. Quelle est probablement la clé utilisée ?
2. Déchiffrer alors le mot `QEXLW`.
3. Pourquoi le chiffre de César est-il facile à casser, même sans analyse de fréquences ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Le **chiffrement affine** transforme la lettre de rang x (de 0 pour `A` à 25 pour `Z`) en la lettre de rang y, reste de la division de $3x + 5$ par 26.

1. Chiffrer le mot `CODE`.
2. Avec la fonction $2x + 1$ à la place de $3x + 5$, chiffrer `A` et `N`. Pourquoi ce choix de clé est-il mauvais ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Le **carré de Polybe** remplace chaque lettre par deux chiffres (ligne puis colonne) dans la grille suivante (`I` et `J` partagent la même case) :

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

1. Chiffrer le mot `PHYSIQUE`.
2. Déchiffrer `32 15 43 45 42 15`.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

En code Morse, chaque lettre est une suite de points ($\cdot$) et de traits ($-$). Extrait de l'alphabet :

$$\text{A} = \cdot - \quad \text{M} = - - \quad \text{O} = - - - \quad \text{S} = \cdot\cdot\cdot \quad \text{T} = - \quad \text{E} = \cdot$$

1. Déchiffrer : $\cdot - \ / \ - \ / \ - - - \ / \ - -$
2. Coder le signal de détresse `SOS`.
3. Pourquoi les lettres les plus courantes, comme `E` et `T`, ont-elles les codes les plus courts ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Le numéro ISBN-10 d'un livre comporte 9 chiffres suivis d'une clé de contrôle c. La règle est : en multipliant les chiffres par $10, 9, 8, \ldots, 2$ et la clé par 1, la somme obtenue doit être un multiple de 11.

1. Calculer la clé c du numéro 2-07-036024-c.
2. Un chiffre a été mal recopié : 2-07-036084-5. Le contrôle détecte-t-il l'erreur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

1. Combien de clés différentes possède le chiffre de César (en excluant le décalage nul) ?
2. Un **chiffrement par substitution** remplace chaque lettre par une autre selon un ordre quelconque (une permutation de l'alphabet). Combien de clés possibles y a-t-il ? En donner un ordre de grandeur.
3. Un ordinateur teste un milliard (10^9) de clés par seconde. Combien de temps lui faut-il, environ, pour tester toutes les clés de substitution ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

En informatique, le code **ASCII** associe un nombre à chaque caractère : `A` $= 65$, `B` $= 66$, …, `Z` $= 90$. Ces nombres sont stockés en binaire sur 7 bits.

1. Écrire `A` en binaire sur 7 bits.
2. Déchiffrer le message binaire : 1001000 1001001.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Pour détecter des erreurs de transmission, on ajoute à chaque groupe de 7 bits un **bit de parité** : on le choisit pour que le nombre total de 1 (sur les 8 bits) soit **pair**.

1. Quel bit de parité faut-il ajouter à 1011001 ?

2. On reçoit les octets 10110101 et 01100110. Lequel contient certainement une erreur ?
3. Ce procédé détecte-t-il toutes les erreurs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Chiffre LUNE par un décalage de quatre positions vers la droite, avec retour à A après Z.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Déchiffre IHG si le chiffrement avance chaque lettre de trois positions.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Deux décalages successifs de 18 et 11 positions s'appliquent sur 26 lettres. Donne le décalage équivalent entre 0 et 25.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Avec A = 1 à Z = 26, décode 13 5 18.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un code écrit les lettres de rang impair puis celles de rang pair, dans leur ordre initial. Code PLANETE.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Pour décoder AOUPMN, remets les trois premières lettres aux rangs impairs et les autres aux rangs pairs.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un code inverse l'ordre des lettres dans chaque bloc de trois. Décode REMLAC.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Avec le code A ↔ Z, B ↔ Y, C ↔ X, etc., chiffre NEIGE.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

En Morse, A = .-, N = -., T = -, E = . Les barres isolent les lettres. Décode « -. / .- / - / . ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Dans un code de César, C devient J. Donne le décalage vers la droite entre 0 et 25.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Congruences

Exercice 1

On dit que deux entiers a et b sont **congrus modulo** n, noté $a \equiv b \pmod{n}$, s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n (ou de manière équivalente, si n divise $a - b$).

1. Donner le reste (compris entre 0 et $n-1$) de :
   - 47 modulo 5 ;
   - 100 modulo 7 ;
   - -13 modulo 5.
2. Il est actuellement 15 **h** 00 sur une horloge à 24 heures. Quelle heure sera-t-il dans 100 **heures** ? Exprimer ce calcul sous forme d'une congruence modulo 24.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Les congruences sont compatibles avec l'addition, la soustraction et la multiplication : si $a \equiv a' \pmod{n}$ et $b \equiv b' \pmod{n}$, alors $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$ et $a \times b \equiv a' \times b' \pmod{n}$.

Sans effectuer les grands produits, déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. $A = 1\,003 \times 2\,005 + 704$ par 7 ;
2. $B = 2\,025 \times 2\,026 \times 2\,027$ par 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Puissances et congruences :

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 7 ?
2. Quel est le **chiffre des unités** du nombre $7^{2\,026}$ (c'est-à-dire son reste modulo 10) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Démonstration des critères de divisibilité par les congruences :

Soit un nombre à quatre chiffres $N = \overline{mcdu} = m \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + u$.

1. Sachant que $10 \equiv 1 \pmod{9}$, que vaut $10^k \pmod{9}$ pour tout entier $k \geq 1$? En déduire le critère de divisibilité par 9.
2. Sachant que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, calculer $10^1, 10^2, 10^3$ modulo 11. En déduire le critère de divisibilité par 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Clé de contrôle du numéro AVS suisse (norme EAN-13) : Un numéro AVS suisse comporte 13 chiffres (commençant par `756`), dont le 13e chiffre c est une **clé de contrôle** calculée modulo 10.

Pour les 12 premiers chiffres $d_1 d_2 \ldots d_{12}$, on calcule la somme pondérée :

$$S = (d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + 3 \times (d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12})$$

Le chiffre de contrôle $c \in \{0, \ldots, 9\}$ est choisi pour que $S + c \equiv 0 \pmod{10}$.

1. Calculer le chiffre de contrôle c du numéro fictif `756.9217.0769.8c`.
2. Montrer pourquoi ce système détecte automatiquement toute erreur portant sur un seul chiffre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Les jours de la semaine forment un cycle de période 7.

1. Aujourd'hui, nous sommes **mercredi**. Quel jour de la semaine sera-t-on dans exactement 1 000 **jours** ?
2. Sachant que le 1er **janvier** 2026 est un **jeudi**, quel jour de la semaine sera le 1er **janvier** 2030 ? *(Rappel : une année commune compte* 365 *jours et une année bissextile comme* 2028 *compte* 366 *jours.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Retrouver le jour de la semaine d'une date donnée :

On donne pour référence que le 1er **janvier** 2026 est un **jeudi** (2026 n'est pas bissextile).

1. À l'aide des restes modulo 7 des longueurs des mois de janvier à juillet, déterminer quel jour de la semaine tombe la Fête nationale suisse du 1er **août** 2026.
2. Vérifier que le 14 **mars** 2026 est un **samedi**, puis remonter dans le temps pour retrouver quel jour de la semaine est né Albert Einstein, le 14 **mars** 1879. *(Rappel du calendrier grégorien : une année est bissextile si elle est divisible par* 4*, sauf les siècles non divisibles par* 400 *: ainsi* 1900 *n'était pas bissextile, mais* 2000 *l'était.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

1. Résoudre la congruence suivante (trouver tous les entiers x modulo 7) :

$$3x \equiv 4 \pmod 7$$

2. Un système de deux engrenages donne un entier naturel N vérifiant simultanément :

$$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod 5 \\ N \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$$

   Déterminer le plus petit entier naturel N solution de ce système, puis décrire l'ensemble de toutes les solutions positives.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Calcul de la date de Pâques (algorithme de Gauss) : Depuis le concile de Nicée (325), Pâques est fixée au *premier dimanche suivant la pleine lune de printemps.*

Pour toute année Y comprise entre 1900 et 2099, le mathématicien Carl Friedrich Gauss a établi l'algorithme suivant basé sur des congruences :

- $a \equiv Y \pmod{19}$ *(cycle lunaire de Méton)*
- $b \equiv Y \pmod 4$ et $c \equiv Y \pmod 7$ *(cycle des jours de la semaine)*
- $d \equiv (19a + 24) \pmod{30}$ *(nombre de jours après le 21 mars jusqu'à la pleine lune pascale)*
- $e \equiv (2b + 4c + 6d + 5) \pmod 7$ *(nombre de jours jusqu'au dimanche suivant)*

La date de Pâques est alors le $(22 + d + e)$ **mars** (si ce nombre dépasse 31, on soustrait 31 pour obtenir le jour en **avril**).

Appliquer cet algorithme étape par étape pour déterminer la date exacte de Pâques en $Y = 2026$ (puis vérifier qu'il s'agit bien d'un dimanche en sachant que le 1er janvier 2026 est un jeudi).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Démonstrations par congruences :

1. À l'aide d'un tableau de congruences modulo 3, montrer que pour tout entier n, $n^3 - n$ est divisible par 3. En déduire que $n^3 - n$ est toujours divisible par 6.
2. Montrer que le carré d'un entier quelconque n^2 ne peut être congru qu'à 0 **ou** 1 **modulo** 4. En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = 2\,027$ n'a **aucune solution entière**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

1. Calculer le reste de la division de 47 par 5, puis celui de -8 par 5 (le reste doit être compris entre 0 et 4).
2. A-t-on $47 \equiv -8 \pmod 5$? Justifier de deux façons.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

1. Calculer les derniers chiffres de 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5. Que remarque-t-on ?
2. En déduire le chiffre des unités de 7^{2026}.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Quel est le reste de la division de 3^{50} par 8 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Il est 9 h du matin.

1. Quelle heure sera-t-il dans 50 heures (sur une horloge de 24 h) ?
2. Quelle heure indiquera une horloge à aiguilles (cycle de 12 h) dans 50 heures ?
3. Quelle heure était-il il y a 100 heures (horloge de 24 h) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

1. Quels sont les restes possibles du carré d'un entier dans la division par 4 ? (Étudier n pair et n impair.)
2. En déduire les restes possibles d'une somme de deux carrés modulo 4.
3. Le nombre 2 027 peut-il s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

1. Montrer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, puis que $100 \equiv 1$ et $1\,000 \equiv -1 \pmod{11}$.
2. En déduire le critère de divisibilité par 11 (somme alternée des chiffres).
3. Tester si 918 082 est divisible par 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

1. Résoudre $5x \equiv 3 \pmod 7$ en testant les valeurs de x de 0 à 6.
2. Donner toutes les solutions entières comprises entre 0 et 30.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La preuve par 9 utilise le fait qu'un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

1. Un élève a calculé $347 \times 526 = 182\,522$. Vérifier ce résultat par la preuve par 9.
2. Un autre élève a trouvé 182 252. La preuve par 9 détecte-t-elle l'erreur ? Pourquoi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

1. Calculer $n^2 \bmod 3$ pour $n \equiv 0$, 1 et 2 (mod 3).
2. En déduire que $n^2 + 1$ n'est jamais divisible par 3.
3. $n^2 + 2$ peut-il être divisible par 3 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Le 1er janvier 2026 était un jeudi. L'année 2026 n'est pas bissextile.

1. Quel est le rang du 25 décembre dans l'année ?
2. Quel jour de la semaine sera le 25 décembre 2026 ?
3. Quel jour de la semaine sera le 1er janvier 2027 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Quel est le reste de 173 modulo 12 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Donne le représentant de -33 modulo 7 entre 0 et 6.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

98 et 35 sont-ils congrus modulo 9 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Aujourd'hui on est jeudi. Quel jour sera-t-on dans 52 jours ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Calcule le reste de 29×38 modulo 7 sans développer.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Quel est le dernier chiffre de 7^4 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Quel x de 0 à 10 rend x + 5 congru à 2 modulo 11 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Quel est le plus petit entier positif congru à 4 modulo 6 et à 1 modulo 5 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Pour quels modules positifs 26 est-il congru à 14 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Donne le reste de 3^6 modulo 4.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Polygones

Exercice 1

1. En découpant un polygone convexe à n côtés en triangles à partir d'un seul sommet, justifier la formule donnant la **somme des angles intérieurs** :

$$S_n = (n-2) \times 180^\circ$$

2. Calculer la somme des angles intérieurs d'un pentagone ($n = 5$), d'un hexagone ($n = 6$) et d'un octogone ($n = 8$).
3. Dans un hexagone convexe $ABCDEF$, cinq angles mesurent 110°, 125°, 130°, 115° et 105°. Calculer la mesure du sixième angle $\widehat{F}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Pour un **polygone régulier** convexe à n côtés, tous les côtés ont même longueur et tous les angles intérieurs ont même mesure α_n.

1. Donner les formules de l'**angle au centre** θ_n, de l'**angle extérieur** e_n et de l'**angle intérieur** α_n.
2. Compléter le tableau suivant pour le pentagone (5), l'octogone (8), le décagone (10) et le dodécagone (12) :

n	5	8	10	12
θ_n (angle au centre)	?	?	?	?
α_n (angle intérieur)	?	?	?	?

3. Quel polygone régulier possède un angle intérieur égal à 156° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Dans un polygone convexe à n côtés, on peut tracer des diagonales reliant deux sommets non consécutifs.

1. Expliquer pourquoi le nombre total de diagonales vaut $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.
2. Combien de diagonales possède un décagone ($n = 10$) ?
3. Un polygone convexe possède exactement 54 **diagonales**. Combien a-t-il de côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Tracés à la règle non graduée et au compas :

On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 5$ cm.

1. Expliquer comment construire avec précision un **hexagone régulier** $ABCDEF$ inscrit dans $\mathcal{C}$ en n'utilisant que le compas et la règle.
2. Expliquer comment en déduire immédiatement :
   - un **triangle équilatéral** inscrit dans $\mathcal{C}$;
   - un **dodécagone régulier** (12 côtés) inscrit dans $\mathcal{C}$.
3. Quel est le périmètre exact de l'hexagone régulier $ABCDEF$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Construction à la règle et au compas d'un octogone régulier et d'un pentagone régulier :

1. Décrire le protocole à la règle et au compas permettant de construire un **octogone régulier** inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
2. On souhaite maintenant construire un **pentagone régulier** inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 1$ (méthode de Ptolémée) :
   - Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AA']$ et $[BB']$.
   - Placer M, milieu du rayon $[OA']$.
   - Reporter au compas la longueur MB sur le diamètre $[AA']$ (de M vers O, jusqu'au point K sur $[OA]$).
   - Calculer par le théorème de Pythagore la longueur MB, puis OK, et enfin la longueur BK (qui donne exactement la longueur du côté du pentagone régulier : $c_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Polygones étoilés $\{n/k\}$ (notation de Schläfli) : On place n sommets régulièrement espacés sur un cercle et, en partant d'un sommet, on trace une corde en sautant de k **sommets en** k **sommets** jusqu'à revenir au point de départ (avec $1 < k < n/2$).

1. Donner la condition arithmétique sur n et k pour que la figure $\{n/k\}$ soit tracée **d'un seul trait continu** en passant par tous les n sommets (polygone étoilé vrai).
2. Parmi les notations suivantes, indiquer lesquelles forment un vrai polygone étoilé d'un seul trait et lesquelles se décomposent en plusieurs polygones superposés (préciser lesquels) :
   - $\{5/2\}$, $\{6/2\}$, $\{7/2\}$, $\{7/3\}$, $\{8/2\}$, $\{8/3\}$, $\{9/3\}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Angles aux pointes des polygones étoilés : Lorsqu'on trace un polygone étoilé régulier $\{n/k\}$ inscrit dans un cercle, chaque côté sous-tend un arc correspondant à k intervalles sur n.

1. En utilisant la somme des angles au sommet dans les triangles ou les arcs interceptés (l'angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre), montrer que l'angle intérieur β à chaque pointe de $\{n/k\}$ vaut :

$$\beta = 180^\circ \times \frac{n - 2k}{n}$$

2. Calculer l'angle à la pointe du pentagramme $\{5/2\}$, de l'octagramme $\{8/3\}$ et des deux heptagrammes $\{7/2\}$ et $\{7/3\}$ (arrondir au dixième de degré si nécessaire).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Segments moyens et théorème de Varignon : On rappelle le *théorème des milieux (segment moyen)* : dans tout triangle ABC, le segment joignant les milieux I de $[AB]$ et J de $[AC]$ est **parallèle** à $[BC]$ et mesure la **moitié** de $[BC]$ ($IJ = \frac{1}{2}BC$).

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque dont les diagonales mesurent $AC = 14$ cm et $BD = 10$ cm. On note I, J, K, L les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. En appliquant le théorème des milieux dans les triangles ABC et ADC, montrer que $(IJ)//(KL)$ et que $IJ = KL = 7$ cm.
2. En déduire la nature exacte du quadrilatère $IJKL$ (appelé *parallélogramme de Varignon*) et calculer son **périmètre**.
3. Quelle condition doivent vérifier les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ pour que $IJKL$ soit un **losange** ? un **rectangle** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Polygones diminués par les milieux : On part d'un carré C_0 de côté $a_0 = 8$ cm. En joignant les milieux des 4 côtés de C_0, on obtient un nouveau carré C_1 (polygone diminué d'ordre 1). En joignant les milieux des côtés de C_1, on obtient C_2, et ainsi de suite.

1. Calculer l'aire $\mathcal{A}_0$ de C_0, puis déterminer l'aire $\mathcal{A}_1$ de C_1 (par découpage géométrique ou par le théorème de Pythagore).
2. En déduire le rapport d'aire $\frac{\mathcal{A}_{k+1}}{\mathcal{A}_k}$ entre deux étapes successives, puis calculer $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.
3. Calculer la longueur du côté a_2 de C_2 et expliquer pourquoi C_2 est une réduction homothétique de C_0 de rapport $\frac{1}{2}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Polygones diminués (troncature d'un carré) : On part d'un carré $ABCD$ de côté 10 cm ($\mathcal{A} = 100$ cm^2). À chacun des 4 sommets, on retranche un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés perpendiculaires mesurent x cm (avec $0 < x < 5$), de façon à obtenir un **octogone**.

1. Quelle condition doit vérifier x pour que cet octogone soit **régulier** (tous ses côtés de même longueur) ? Calculer la valeur exacte de x (en utilisant $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ pour l'approximation).
2. Pour un carré diminué général où l'on retire aux 4 coins des triangles rectangles isocèles de cathète $x = 3$ cm, calculer le **périmètre** et l'**aire** de l'octogone obtenu (donner les valeurs exactes avec $\sqrt{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On considère un **décagone régulier** (10 côtés).

1. Calculer la somme de ses angles intérieurs.
2. Calculer la mesure d'un angle intérieur et d'un angle extérieur.
3. Vérifier que la somme des angles extérieurs vaut 360°.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés est $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

1. Justifier cette formule.
2. Calculer le nombre de diagonales d'un hexagone et d'un décagone.
3. Quel polygone possède exactement 20 diagonales ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

1. Un polygone régulier a des angles extérieurs de 24°. Combien a-t-il de côtés ? Quelle est la somme de ses angles intérieurs ?
2. Existe-t-il un polygone régulier dont les angles intérieurs mesurent 100° ? 140° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un hexagone régulier a des côtés de 6 cm.

1. Expliquer pourquoi il se découpe en 6 triangles équilatéraux.
2. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. Calculer l'aire de l'hexagone (valeur exacte et arrondi au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Archimède encadrait π à l'aide de polygones réguliers inscrits dans un cercle.

On considère un cercle de rayon 1 et l'hexagone régulier inscrit.

1. Quel est le périmètre de l'hexagone ? Celui du cercle ?
2. En déduire une première approximation de π (par défaut).
3. Pourquoi l'approximation s'améliore-t-elle avec 12, 24, 48 ou 96 côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Les angles d'un quadrilatère convexe mesurent x, $2x$, $3x$ et $4x$ (en degrés).

1. Calculer x et les quatre angles.
2. Montrer que ce quadrilatère possède deux côtés parallèles (on pourra considérer les angles consécutifs x et $4x$, en supposant qu'ils sont adjacents au même côté).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un pentagone convexe a quatre angles de 100°, 110°, 120° et 130°.

1. Calculer le cinquième angle.
2. Pourrait-il exister un pentagone convexe dont quatre angles mesurent 150° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On part d'un triangle équilatéral de côté 9 cm. À chaque sommet, on coupe un petit triangle équilatéral de côté 3 cm.

1. Quelle est la nature du polygone obtenu ? Justifier.
2. Quelle fraction de l'aire du grand triangle représente-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un carré est inscrit dans un cercle de rayon 5 cm (ses sommets sont sur le cercle).

1. Que vaut la diagonale du carré ?
2. Calculer l'aire du carré à l'aide de ses diagonales.

3. Quel pourcentage de l'aire du disque le carré occupe-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Peut-on paver un sol uniquement avec des pentagones réguliers ? Avec des hexagones réguliers ? Justifier en étudiant les angles qui se rencontrent en un sommet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Combien de diagonales partent d'un sommet d'un décagone convexe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Combien de diagonales a un heptagone convexe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Quelle est la somme des angles d'un dodécagone convexe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un polygone régulier a des angles extérieurs de 24°. Combien de côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Quelle est la mesure intérieure d'un angle du pentagone régulier ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un polygone régulier de 14 côtés a un périmètre de 63 cm. Quelle longueur d'un côté ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Combien de côtés a un polygone dont les angles intérieurs totalisent 1 260° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Les côtés d'un polygone sont égaux. Est-il forcément régulier ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Quatre angles d'un pentagone convexe valent 85°, 100°, 108° et 117°. Quel est le cinquième ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Quel angle minimal positif ramène un octogone régulier sur lui-même par rotation autour du centre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Isométries et pavages

Exercice 1

On rappelle qu'une **isométrie** du plan est une transformation géométrique qui conserve les longueurs et les angles.

1. Citer les 4 **types d'isométries** du plan et préciser, pour chacune, les éléments géométriques qui la définissent entièrement.
2. Préciser lesquelles sont des **déplacements** (conservent l'orientation des figures, dits *isométries directes*) et lesquelles sont des **retournements** (inversent l'orientation, dits *isométries indirectes*).
3. Dans un repère orthonormé, le triangle ABC a pour sommets $A(1;2)$, $B(4;2)$ et $C(2;5)$. Donner les coordonnées de son image $A'B'C'$ par :
   - la translation de vecteur $\vec{u}(3;-1)$;
   - la symétrie centrale de centre $O(0;0)$ (rotation de 180°).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Composition de deux symétries axiales :

1. Soient deux droites parallèles d_1 et d_2 distantes de 3 cm (avec d_2 située 3 cm à droite de d_1). On applique d'abord la symétrie d'axe d_1, puis la symétrie d'axe d_2 à un point M. Quelle isométrie simple réalise directement cette transformation composée ? Préciser ses caractéristiques.
2. Soient maintenant deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point O et formant un angle de 35° (dans le sens anti-horaire de d_1 vers d_2). Quelle isométrie simple réalise la composée $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ (d'abord d_1, puis d_2) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Composition d'isométries dans le plan repéré : On considère le point $P(4;1)$.

1. On applique d'abord à P une rotation r_1 de centre $O(0;0)$ et d'angle $+90°$ (quart de tour anti-horaire) pour obtenir P_1, puis une translation t de vecteur $\vec{u}(2;-3)$ pour obtenir P_2. Calculer les coordonnées de P_1 et P_2.
2. Que obtient-on si l'on effectue les deux transformations dans l'**ordre inverse** (d'abord la translation t, puis la rotation r_1) ? Noter Q_2 le point final. Conclure sur la commutativité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Pavages réguliers du plan : Un pavage est dit *régulier* s'il recouvre tout le plan sans trou ni chevauchement à l'aide d'**un seul type de polygone régulier**, assemblé bord à bord.

1. En un sommet commun où se rejoignent k polygones réguliers identiques à n côtés ($n \geq 3$ et $k \geq 3$), quelle équation relie k et l'angle intérieur $\alpha_n = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$?
2. Résoudre cette équation pour démontrer qu'il n'existe exactement que 3 **pavages réguliers** possibles dans tout le plan (et préciser leurs noms).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Paver avec un triangle ou un quadrilatère quelconque :

1. Expliquer à l'aide d'une isométrie précise (**demi-tour / symétrie centrale**) comment on peut paver tout le plan avec **n'importe quel triangle** ABC (même scalène quelconque).

2. Expliquer pourquoi **tout quadrilatère quelconque** $ABCD$ (même non convexe !) pave également le plan, en indiquant quelles isométries permettent de placer ses voisins autour d'un quadrilatère de départ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Pavages semi-réguliers (archimédiens) — Condition aux sommets : Un pavage semi-régulier utilise **plusieurs types** de polygones réguliers de même longueur de côté, disposés dans **le même ordre cyclique autour de chaque sommet**. On le note par la suite des nombres de côtés des polygones autour d'un sommet, par exemple $(3, 6, 3, 6)$.

1. Vérifier que la somme des angles autour d'un sommet vaut bien $360°$ pour les configurations suivantes :
   - $(3, 6, 3, 6)$ *(kagomé)* ;
   - $(4, 8, 8)$;
   - $(3, 12, 12)$;
   - $(3, 4, 6, 4)$.
2. Tester la configuration $(5, 5, 10)$ (2 pentagones et 1 décagone) : la somme des angles vaut-elle $360°$? Peut-elle malgré tout former un pavage uniforme du plan ? *(Indice : examiner le sommet voisin autour du pentagone.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Classification des pavages d'Archimède : Il existe exactement 8 **pavages semi-réguliers** d'Archimède (plus les 3 réguliers, soit 11 pavages uniformes).

1. Montrer que l'équation des angles $\sum_{i=1}^{k} \alpha_{n_i} = 360°$ autour d'un sommet de degré k est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k-2}{2}$$

2. Vérifier cette relation pour le pavage $(4, 6, 12)$ $(k = 3)$ et pour le pavage $(3, 3, 3, 4, 4)$ $(k = 5)$.
3. Quelle différence géométrique distingue les deux pavages archimédiens $(3, 3, 3, 4, 4)$ et $(3, 3, 4, 3, 4)$ qui utilisent pourtant les mêmes polygones (3 triangles et 2 carrés par sommet) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Motif minimal (domaine fondamental) et pavages de type Escher : On part d'un carré de côté 4 cm.

1. On modifie le bord gauche en découpant un demi-disque de rayon 1 cm vers l'intérieur, et l'on **colle ce même demi-disque** exactement à la même hauteur sur le bord droit vers l'extérieur (translation horizontale).
2. On découpe de même un triangle isocèle de base 2 cm et de hauteur 1,5 cm sur le bord inférieur vers l'intérieur, et on le reporte sur le bord supérieur vers l'extérieur (translation verticale).

Expliquer pourquoi ce nouveau motif minimal pave exactement le plan par translations, et calculer son **aire exacte** ainsi que son **périmètre**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Analyse d'un pavage à motif minimal : Dans le pavage semi-régulier d'Archimède $(3, 4, 6, 4)$, chaque hexagone régulier est entouré de 6 carrés et de 6 triangles équilatéraux.

On considère une **maille élémentaire** (motif minimal qui se répète par translations) contenant exactement 1 **hexagone régulier**, 3 **carrés** et 2 **triangles équilatéraux**, tous de côté $a = 2$ cm.

1. Calculer l'aire exacte de l'hexagone régulier (formé de 6 triangles équilatéraux de côté 2 cm), de chaque carré et de chaque triangle équilatéral.

2. En déduire l'aire totale de cette maille élémentaire du pavage $(3, 4, 6, 4)$.
3. Vérifier la cohérence du décompte : autour de chaque hexagone il y a 6 carrés partagés entre 2 hexagones $(6/2 = 3)$ et 6 triangles partagés entre 3 hexagones $(6/3 = 2)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Pavage par rotation autour des milieux (méthode de Escher) :

On part d'un triangle équilatéral ABC de côté 6 cm.

1. Sur le côté $[AB]$, on marque son milieu M. On trace une courbe quelconque allant de A à M, puis on lui applique une **rotation de** 180° **autour de** M pour obtenir l'autre moitié du côté allant de M à B (si la première moitié sort du triangle, la seconde rentre exactement d'autant).
2. On fait de même sur $[BC]$ autour de son milieu N, et sur $[CA]$ autour de son milieu P.

Expliquer quelles isométries permettent ensuite d'assembler ces tuiles déformées pour recouvrir tout le plan sans vide ni chevauchement, et donner l'aire de chaque tuile.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Pour chaque isométrie, dire si elle **conserve** ou **inverse** l'orientation des figures (sens de parcours des sommets) :

1. une translation ;
2. une rotation ;
3. une symétrie centrale ;
4. une symétrie axiale.

Comment reconnaître, sur un pavage, qu'un motif a été obtenu par symétrie axiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Deux droites d_1 et d_2 se coupent en O en formant un angle de 30°. On applique à un point M la symétrie d'axe d_1, puis la symétrie d'axe d_2.

1. Quelle distance de O conserve-t-on à chaque étape ?
2. Quelle transformation unique obtient-on ? Préciser son centre et son angle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Dans un repère, on donne $A(1; 0)$ et $B(4; 2)$. On applique au point $M(0; 0)$ la symétrie de centre A, puis la symétrie de centre B.

1. Calculer les coordonnées de M_1 puis de M_2.
2. Recommencer avec $N(2; 5)$.
3. Quelle transformation unique permet de passer directement de M à M_2 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

1. Calculer l'angle intérieur d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un pentagone régulier et d'un hexagone régulier.
2. Expliquer pourquoi il n'existe que trois pavages réguliers du plan (avec un seul type de polygone régulier).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un pavage **semi-régulier** utilise plusieurs polygones réguliers, avec la même configuration à chaque sommet. On note par exemple $(4, 8, 8)$: un carré et deux octogones autour de chaque sommet.

Vérifier que la somme des angles fait bien 360° pour les configurations suivantes :

1. $(4, 8, 8)$
2. $(3, 12, 12)$
3. $(3, 3, 3, 3, 6)$
4. $(3, 4, 6, 4)$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Une frise est obtenue en répétant un motif par une translation de 5 cm vers la droite. Un point P du premier motif est situé à 2 cm du bord gauche de la frise.

1. À quelle distance du bord gauche se trouve le point correspondant du 4e motif ?
2. Quel motif contient le point correspondant situé à 47 cm du bord ?
3. La frise mesure 1 m. Combien de motifs complets contient-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Les traces de pas laissées dans le sable (pied gauche, pied droit, pied gauche…) sont un exemple de **symétrie glissée** : composée d'une symétrie axiale et d'une translation parallèle à l'axe.

1. Pourquoi une simple translation ne suffit-elle pas à passer d'une empreinte de pied gauche à l'empreinte suivante (pied droit) ?
2. Si deux empreintes gauches consécutives sont distantes de 1,2 m, quelle est la longueur de la translation de la symétrie glissée ?
3. Que donne la symétrie glissée appliquée deux fois ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Dans un repère, on applique la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre : elle transforme $(x; y)$ en $(y; -x)$.

1. Donner l'image du triangle $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(1; 3)$.
2. Vérifier que $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$.
3. Quelle est l'image de A après 4 rotations successives ? Après 7 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Peut-on passer du triangle T_1 au triangle T_2 par une isométrie ? Justifier.

1. T_1 : côtés 3, 4, 5 ; T_2 : côtés 5, 3, 4.
2. T_1 : côtés 3, 4, 5 ; T_2 : côtés 3, 4, 6.
3. T_1 : côtés 6, 8, 10 ; T_2 : côtés 3, 4, 5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un motif est dessiné dans un carré. On construit un pavage en appliquant au carré des rotations de 90° autour de l'un de ses sommets S.

1. Combien de carrés obtient-on autour de S avant de revenir au carré de départ ?
2. Le motif contient un point P situé à 3 cm de S. À quelle distance de S se trouvent ses images ?
3. Ces quatre images forment un quadrilatère. Lequel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Trois hexagones réguliers identiques se rencontrent par leurs sommets. Les angles remplissent-ils le tour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Quatre carrés côte à côte par leurs sommets peuvent-ils remplir le tour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Peut-on remplir un sommet d'un pavage bord à bord avec des pentagones réguliers seuls ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Combien de triangles équilatéraux identiques peut-on réunir par les sommets autour d'un point sans trou ni chevauchement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un motif est translaté de $(5, -2)$, puis de $(-3, 4)$. Donne le déplacement total.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une réflexion conserve-t-elle l'ordre horaire des sommets d'un triangle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Que donnent deux rotations de 135° autour du même centre dans le même sens ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Peut-on paver le plan avec des rectangles de 3×5 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Fais tourner un carré de 180° autour du milieu d'un côté. Comment touche-t-il le carré initial ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Deux octogones réguliers et un carré arrivent à un même sommet. Vérifie la somme des angles.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Ombre et lumière

Exercice 1

On éclaire une balle de tennis opaque avec une **lampe torche ponctuelle** (très petite source) dans une pièce sombre, devant un mur blanc.

1. Expliquer comment tracer géométriquement les rayons lumineux limites qui délimitent l'ombre de la balle sur le mur.
2. Définir et distinguer les trois zones suivantes :
   - l'**ombre propre** ;
   - le **cône d'ombre** ;
   - l'**ombre portée**.
3. Observe-t-on une zone de **pénombre** dans cette expérience avec une source ponctuelle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Une source lumineuse ponctuelle S est placée au niveau d'un banc optique. Un disque opaque vertical de diamètre $d = 12$ cm est placé à la distance $D_1 = 40$ cm de la source S. Un écran blanc vertical est placé parallèlement au disque, à une distance totale $D_2 = 1{,}40$ m de la source S.

1. Quelle est la distance entre le disque et l'écran ?
2. À l'aide du théorème de Thalès (proportionnalité des triangles semblables), calculer le **diamètre d' de l'ombre portée** sur l'écran.
3. Que devient ce diamètre si l'on rapproche le disque à 20 cm de la source S (en laissant l'écran fixe à 1,40 m) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Méthode de Thalès au Soleil : Par une journée ensoleillée, les rayons du Soleil arrivent pratiquement **parallèles** entre eux sur Terre.

Pour mesurer la hauteur H d'un grand sapin, un élève plante verticalement dans le sol horizontal un bâton de longueur $h = 1{,}20$ m. Il mesure :

- la longueur de l'ombre du bâton au sol : $\ell = 1{,}50$ m ;
- la longueur de l'ombre du sapin au sol : $L = 22{,}5$ m.

1. Expliquer pourquoi les rayons solaires sont considérés comme parallèles (contrairement à ceux d'une lampe de poche).
2. Calculer la hauteur H du sapin.
3. Si un nuage passe plus tard et que l'expérience est refaite avec un projecteur au sol placé à 10 m du bâton, le rapport H/h resterait-il égal à L/ℓ ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

On remplace la source ponctuelle par une **source lumineuse étendue** (un disque lumineux de diamètre $D_S = 10$ cm). On place devant un écran une boule opaque de diamètre $D_O = 10$ cm (même taille que la source).

1. Expliquer quels 4 **rayons lumineux limites** il faut tracer pour délimiter les zones d'ombre derrière la boule.
2. Distinguer l'**ombre pure (ombre totale)** et la **pénombre** (ombre partielle) sur l'écran.

3. Un observateur place son œil sur l'écran dans la zone de **pénombre** et regarde vers la source lumineuse. Que voit-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Calcul de la largeur de l'ombre pure et de la pénombre :

Sur un axe optique horizontal ($y = 0$), on place :

- à $x = 0$ cm, une lampe verticale AB de hauteur 6 cm (A à $+3$ cm et B à -3 cm) ;
- à $x = 50$ cm, un obstacle opaque vertical CD de hauteur 12 cm (C à $+6$ cm et D à -6 cm) ;
- à $x = 150$ cm, un écran vertical.

1. Calculer la hauteur y sur l'écran où arrivent :
   - le rayon extérieur passant par A et C ;
   - le rayon croisé passant par B et C.
2. Par symétrie, donner les hauteurs d'arrivée des rayons passant par D.
3. En déduire la **hauteur de l'ombre pure** (ombre totale) et la **largeur de chaque bande de pénombre** sur l'écran.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Éclipses de Soleil et de Lune : Le Soleil (diamètre $\approx 1{,}39 \times 10^6$ km) est une immense source lumineuse étendue. La Lune et la Terre projettent chacune derrière elles un cône d'ombre pure (convergent car elles sont plus petites que le Soleil) et une zone de pénombre.

1. Lors d'une **éclipse de Soleil**, quel astre se trouve entre les deux autres ? Dans quelle zone d'ombre de cet astre doit se trouver un observateur terrestre pour voir :
   - une éclipse **totale** ;
   - une éclipse **partielle** ;
   - une éclipse **annulaire** (la Lune étant légèrement plus éloignée de la Terre, la pointe de son cône d'ombre n'atteint pas le sol) ?
2. Lors d'une **éclipse de Lune**, quel astre est entre les deux autres ? Pourquoi la Lune prend-elle une teinte rougeâtre (Lune de sang) au lieu de devenir totalement invisible pendant la totalité ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Phases de la Lune vs Éclipses :

1. Expliquer pourquoi on observe chaque mois des **phases de la Lune** (nouvelle lune, premier quartier, pleine lune, dernier quartier) alors qu'il n'y a pas d'éclipse de Lune à chaque pleine lune.
2. Les phases de la Lune sont-elles dues à l'**ombre portée** de la Terre sur la Lune, ou à l'**ombre propre** de la Lune ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Fonctionnement qualitatif de la chambre noire (sténopé) :

Une chambre noire est une boîte fermée et opaque à l'intérieur noir, dont une face est percée d'un tout petit trou (le *sténopé*) et dont la face opposée est un écran translucide (papier calque).

1. À l'aide du principe de **propagation rectiligne de la lumière**, expliquer pourquoi l'image d'une bougie allumée observée sur le calque est **renversée** (tête en bas et gauche/droite inversées).
2. Que se passe-t-il sur l'écran si l'on **agrandit** le diamètre du trou ? (Comparer la **luminosité** et la **netteté** de l'image.)

3. Pourquoi n'observe-t-on pratiquement pas d'image nette si l'on ouvre toute la face avant de la boîte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Dimensionnement d'une chambre noire (sténopé) :

Un élève fabrique une chambre noire de profondeur $d' = 20$ cm (distance entre le trou et le papier calque). Il vise un bâtiment de hauteur $h = 15$ m situé à une distance $d = 60$ m du trou.

1. Écrire la relation de proportionnalité (théorème de Thalès) reliant h, h' (hauteur de l'image sur le calque), d et d'.
2. Calculer la hauteur h' de l'image du bâtiment sur le calque (en cm).
3. L'élève veut photographier la pleine Lune depuis la même chambre noire ($d' = 20$ cm). Sachant que le diamètre de la Lune vaut $D_L \approx 3\,474$ km et sa distance à la Terre vaut $d_L \approx 384\,000$ km, quel sera le diamètre de l'image de la Lune sur le calque (en mm) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (ombre en mouvement) : Un lampadaire ponctuel est fixé au sommet d'un poteau vertical à une hauteur $H = 4{,}5$ m au-dessus d'un trottoir horizontal.

Un piéton de taille $h = 1{,}80$ m marche en s'éloignant du pied du poteau en ligne droite à une vitesse constante $v = 1{,}5$ m/s. À l'instant $t = 0$, il est au pied du poteau ($x = 0$).

1. À la distance $x = 3{,}0$ m du poteau (c'est-à-dire à $t = 2{,}0$ s), calculer la **longueur ℓ de son ombre** au sol (distance entre ses pieds et le bout de l'ombre de sa tête).
2. Exprimer la position X du bout de l'ombre de sa tête (mesurée depuis le pied du poteau) en fonction de x, puis en déduire à quelle **vitesse** se déplace le bout de l'ombre sur le trottoir.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

La lumière se propage dans le vide à environ 300 000 km/s. La distance moyenne Terre–Soleil est d'environ 150 millions de kilomètres.

1. Combien de temps la lumière du Soleil met-elle pour nous parvenir ? Donner le résultat en minutes et secondes.
2. Si le Soleil s'éteignait brusquement, quand nous en apercevrions-nous ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Une source lumineuse ponctuelle S éclaire un carton opaque de hauteur 20 cm, placé verticalement à 50 cm de la source. Un écran est placé parallèlement au carton, à 150 cm de la source.

1. Faire un schéma et expliquer pourquoi l'ombre est plus grande que l'objet.
2. Calculer la hauteur de l'ombre portée sur l'écran.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un disque opaque de 10 cm de diamètre est placé entre une lampe ponctuelle et un écran situé à 2 m de la lampe. On veut obtenir sur l'écran une ombre circulaire de 40 cm de diamètre.

À quelle distance de la lampe faut-il placer le disque ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Pour mesurer la hauteur d'un arbre, Léo plante verticalement un bâton de 1 m. Au même moment, l'ombre du bâton mesure 1,6 m et celle de l'arbre 12 m.

1. Pourquoi peut-on considérer que les rayons du Soleil sont parallèles ?
2. Calculer la hauteur de l'arbre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un lampadaire (assimilé à une source ponctuelle) est placé à 4,5 m de hauteur. Une personne de 1,8 m se tient debout à 3 m du pied du lampadaire.

Calculer la longueur de son ombre sur le sol.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Lors d'une éclipse totale de Soleil, la Lune cache exactement le disque solaire.

- Lune : diamètre 3 474 km, distance à la Terre 384 000 km.
- Soleil : diamètre 1 392 000 km, distance à la Terre 150 000 000 km.

1. Calculer pour chacun le rapport diamètre / distance (à 10^{-5} près).
2. Expliquer pourquoi la Lune peut cacher le Soleil alors qu'elle est environ 400 fois plus petite.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un élève photographie un arbre de 6 m de haut, situé à 30 m, avec une chambre noire (sténopé) de 15 cm de profondeur.

1. L'image sur le fond de la boîte est-elle droite ou renversée ? Pourquoi ?
2. Calculer la hauteur de l'image.
3. Que se passe-t-il si l'on agrandit le trou ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Une **année-lumière** est la distance parcourue par la lumière en une année (on prend 1 an = 365,25 jours et $c = 300\,000$ km/s).

1. Calculer une année-lumière en kilomètres (notation scientifique, 3 chiffres significatifs).
2. L'étoile la plus proche du Soleil, Proxima du Centaure, est à 4,2 années-lumière. Quelle distance cela représente-t-il en km ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un objet opaque est éclairé par **deux** lampes ponctuelles L_1 et L_2 placées côte à côte.

1. Combien d'ombres voit-on sur l'écran ?
2. Décrire les différentes zones de l'écran : quelles lampes éclairent chacune d'elles ?
3. Quel lien avec la pénombre observée derrière un objet éclairé par une source étendue ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Des astronautes d'Apollo ont déposé des réflecteurs sur la Lune. Depuis la Terre, on envoie une impulsion laser qui revient 2,56 s plus tard.

1. Calculer la distance Terre–Lune ($c = 300\,000$ km/s).
2. Pourquoi faut-il diviser par 2 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une source ponctuelle est située sur l'axe d'un disque opaque de 5 cm de diamètre, à 30 cm de son centre. L'écran parallèle est à 90 cm de la source, derrière le disque. Donne le diamètre de l'ombre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un objet opaque reste immobile devant une source ponctuelle, et on éloigne l'écran derrière l'objet. Comment évolue l'ombre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

On éclaire un disque opaque avec une source large plutôt que ponctuelle. Quelle zone peut apparaître entre l'ombre totale et la région bien éclairée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un observateur voit exactement la moitié d'une lampe derrière un cache. Est-il dans l'ombre totale de ce cache ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Sur un schéma, comment tracer les limites de l'ombre derrière une bille opaque éclairée par un point lumineux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Deux petites lampes éclairent une tige opaque devant un écran. À quel endroit la zone est-elle totalement sombre en l'absence d'autres sources ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

À midi solaire, le Soleil est plus haut dans le ciel qu'en début de matinée. Sur un sol horizontal, quelle ombre d'un piquet vertical est la plus courte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un objet opaque mesure 6 cm. Il est à 20 cm d'une source ponctuelle. L'écran parallèle placé à 60 cm de la source montre quelle hauteur d'ombre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Quels astres sont alignés et dans quel ordre lors d'une éclipse de Lune, de la source vers l'astre assombri ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Comment changer un montage à écran fixe pour réduire l'ombre géométrique d'un petit disque placé entre l'écran et une source ponctuelle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Réflexion

Exercice 1

Lois de la réflexion (Snell–Descartes) :

1. Énoncer les deux lois de la réflexion sur un miroir plan en précisant la définition de la **normale**, de l'**angle d'incidence** i et de l'**angle de réflexion** r.
2. Un rayon lumineux frappe un miroir plan en faisant un angle de 32° **avec la surface du miroir** (angle rasant).
   - Calculer l'angle d'incidence i et l'angle de réflexion r.
   - Calculer l'angle total entre le rayon incident et le rayon réfléchi.
   - Calculer la **déviation** D subie par le rayon (angle entre le prolongement du rayon incident et le rayon réfléchi).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Rotation d'un miroir plan : Un faisceau laser fixe arrive horizontalement sur un miroir plan vertical (angle d'incidence initial $i_0 = 0^\circ$, le faisceau repart donc exactement sur lui-même).

On fait tourner le miroir d'un angle $\alpha = 18^\circ$ autour d'un axe vertical passant par le point d'impact.

1. De quel angle tourne la **normale** au miroir ? Quel est le nouvel angle d'incidence i ?
2. De quel angle β a tourné le **rayon réfléchi** ? En déduire la règle générale reliant β et α.
3. *Application :* Dans un lecteur de codes-barres ou un galvanomètre à miroir, on veut balayer un angle de 50° avec le rayon réfléchi. De quel angle doit-on faire pivoter le miroir ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Localisation et propriétés de l'image dans un miroir plan :

Une flèche lumineuse verticale AB de hauteur 6 cm est placée parallèlement à un miroir plan vertical, à une distance $d = 25$ cm devant celui-ci.

1. Où se forme l'image $A'B'$ de la flèche ? Quelle est la distance entre l'objet AB et son image $A'B'$?
2. Quelle est la hauteur de l'image $A'B'$? Est-elle droite ou renversée ? réelle ou virtuelle ?
3. Si l'on recule le miroir de 10 cm en laissant la flèche immobile, de combien de centimètres l'image $A'B'$ se déplace-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Construction du trajet réel d'un rayon lumineux (méthode de l'image virtuelle) :

Dans un repère orthonormé (unité en cm), un miroir plan horizontal est posé le long de l'axe des abscisses ($y = 0$, de $x = 0$ à $x = 12$). Une bougie ponctuelle est en $S(2; 4)$ et l'œil d'un observateur est en $O(10; 4)$.

1. Donner les coordonnées de l'image virtuelle S' de la bougie dans le miroir.
2. Expliquer comment construire le point d'incidence I sur le miroir pour que le rayon parti de S se réfléchisse exactement vers l'œil O, puis calculer les coordonnées de I.
3. Calculer l'angle d'incidence i et vérifier le **principe de Fermat** (comparer la longueur du trajet $S \to I \to O$ avec celle du trajet passant par $J(4;0)$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Champ de vision d'un miroir plan : Un miroir plan vertical MN de largeur $L = 60$ cm est accroché contre un mur. Un observateur place son œil O face au milieu du miroir, à la distance $d = 1{,}00$ m devant celui-ci.

Un grand tableau est affiché sur le mur d'en face, derrière l'observateur, à $D = 3{,}00$ m du miroir (soit 2,00 m derrière l'observateur).

1. Expliquer comment délimiter géométriquement le **champ de vision** du miroir pour l'œil O à l'aide de l'image O' de l'œil.
2. Calculer la **largeur maximale** W du tableau que l'observateur peut voir dans le miroir sans bouger la tête.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Taille minimale d'un miroir pour se voir en entier : Une personne mesure $H = 1{,}76$ m des pieds jusqu'au sommet du crâne, et ses yeux sont situés à 10 cm sous le sommet de son crâne (donc à 1,66 m du sol). Elle se tient debout face à un miroir plan vertical, à une distance $d = 2{,}0$ m.

1. À quelle hauteur au-dessus du sol doit se trouver le **bord inférieur** du miroir pour qu'elle aperçoive tout juste ses pieds ?
2. À quelle hauteur au-dessus du sol doit se trouver le **bord supérieur** du miroir pour qu'elle aperçoive le sommet de sa tête ?
3. En déduire la **hauteur minimale** du miroir. Ce résultat dépend-il de la distance d entre la personne et le miroir ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Miroirs perpendiculaires (rétroréflecteur à 90°) : On place deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre (formant un angle de 90° en un point O).

1. Un rayon lumineux frappe M_1 sous un angle d'incidence $i_1 = 35°$, puis se réfléchit vers M_2. Calculer l'angle d'incidence i_2 et l'angle de réflexion r_2 sur le second miroir M_2.
2. Démontrer (pour un angle i_1 quelconque) que le rayon qui ressort après deux réflexions est toujours **parallèle et de sens opposé** au rayon incident initial (principe des catadioptres de vélo et des réflecteurs lunaires).
3. Si l'on place une bougie entre ces deux miroirs perpendiculaires, combien d'**images virtuelles** observe-t-on au total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Le périscope de sous-marin : Un périscope simple est composé d'un tube en « Z » contenant deux miroirs plans M_1 (en haut) et M_2 (en bas) **parallèles entre eux** et inclinés chacun à 45° par rapport à l'horizontale.

1. Un rayon lumineux horizontal entre par l'ouverture supérieure et frappe M_1. Quels sont son angle d'incidence i_1 et son angle de déviation ? Dans quelle direction repart-il ?
2. Il descend ensuite vers M_2. Sous quel angle d'incidence i_2 frappe-t-il M_2 et dans quelle direction ressort-il vers l'œil ?
3. L'image observée dans ce périscope est-elle **droite ou renversée** (tête en bas) ? Justifier en suivant un rayon venant du haut de l'objet et un rayon venant du bas de l'objet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Kaléidoscope — Deux miroirs formant un angle θ : Lorsque l'on place un petit objet entre deux miroirs plans formant un angle θ (tel que $\frac{360^\circ}{\theta}$ soit un entier), le nombre d'images virtuelles visibles vaut :

$$N = \frac{360^\circ}{\theta} - 1$$

1. Calculer le nombre d'images visibles dans un kaléidoscope pour $\theta = 60^\circ$, puis pour $\theta = 45^\circ$.
2. Deux miroirs M_1 et M_2 forment un angle $\theta = 50^\circ$ en O. Un rayon lumineux se dirige vers M_1 et le frappe en I_1 (en allant dans la direction qui le rapproche de O) sous un angle d'incidence $i_1 = 30^\circ$. Il se réfléchit vers M_2 en I_2, puis ressort.
   - Calculer l'angle d'incidence i_2 et de réflexion r_2 sur M_2.
   - Calculer la **déviation totale** subie par le rayon (vérifier la formule générale $D = 360^\circ - 2\theta$, soit un angle de 2θ entre les droites portant les rayons entrant et sortant).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Réflexions multiples entre deux miroirs parallèles (guide optique) : Deux miroirs plans parallèles M_1 (en $x = 0$ cm) et M_2 (en $x = 12$ cm) se font face sur une longueur de $L = 50$ cm (pour $0 \leq y \leq 50$ cm).

Un faisceau laser pénètre à l'entrée en $A(0; 0)$ et frappe d'abord le miroir M_2 au point $B(12; 9)$.

1. Expliquer pourquoi, à chaque réflexion suivante, le rayon avance toujours de la même distance $\Delta y = 9$ cm le long des miroirs.
2. Lister les coordonnées des points de réflexion successifs sur M_2 et M_1 et déterminer le **nombre total de réflexions** subies par le laser avant de sortir du dispositif.
3. Calculer la distance parcourue par le laser entre l'entrée A et sa 5e réflexion.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un rayon lumineux arrive sur un miroir plan en faisant un angle de 35° avec la **normale** (perpendiculaire au miroir).

1. Quel est l'angle de réflexion ?
2. Quel angle le rayon incident fait-il avec la surface du miroir ?
3. Quel angle forment entre eux le rayon incident et le rayon réfléchi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un rayon laser fixe frappe un miroir plan. On fait tourner le miroir de 10°.

1. De combien varie l'angle d'incidence ?
2. De combien tourne le rayon réfléchi ? (Faire un essai avec une incidence initiale de 20°.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Lucie se tient à 1,5 m d'un grand miroir plan vertical.

1. À quelle distance de Lucie se trouve son image ?
2. Elle avance de 0,5 m vers le miroir. Quelle est la nouvelle distance entre Lucie et son image ?
3. Si elle lève la main droite, quelle main lève son image ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Une personne mesure 1,70 m et ses yeux sont à 1,60 m du sol. Elle veut se voir en entier dans un miroir plan vertical.

1. Quelle est la hauteur minimale du miroir ?
2. À quelle hauteur doit se trouver son bord inférieur ?
3. Ces résultats dépendent-ils de la distance au miroir ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

On place deux miroirs plans perpendiculaires (en coin). Un rayon arrive sur le premier miroir avec un angle d'incidence de $30°$.

1. Avec quel angle d'incidence arrive-t-il sur le second miroir ?
2. Montrer que le rayon ressort parallèle au rayon incident, mais en sens inverse.
3. Citer une application de ce dispositif.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un réveil sans chiffres est vu dans un miroir. L'image semble indiquer 2 h 20.

1. Quelle heure est-il réellement ?
2. Trouver une règle générale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Dans un repère (unité : 1 m), un miroir plan occupe l'axe des abscisses ($y = 0$). Une lampe est placée en $A(2;3)$ et un observateur en $B(8;1)$.

1. Donner les coordonnées de l'image A' de la lampe dans le miroir.
2. En utilisant le fait que le rayon réfléchi semble venir de A', trouver le point I du miroir où la lumière se réfléchit pour atteindre l'observateur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un périscope est formé de deux miroirs plans parallèles, inclinés à $45°$.

1. Un rayon horizontal arrive sur le miroir du haut. Quel est son angle d'incidence ? De quel angle est-il dévié ?
2. Quelle est la direction du rayon qui sort du périscope ?
3. L'image vue est-elle renversée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Deux miroirs plans parallèles M_1 (en $x = 0$) et M_2 (en $x = 30$ cm) se font face. Une bougie est placée en $x = 10$ cm.

1. Donner la position de l'image de la bougie dans M_1, puis dans M_2.
2. L'image vue dans M_2 se reflète à son tour dans M_1. Où se trouve cette nouvelle image ?
3. Combien d'images voit-on en théorie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

1. Quelle différence y a-t-il entre la réflexion sur un miroir et la réflexion sur une feuille de papier blanc ?
2. Pourquoi peut-on voir une feuille de papier de partout dans une pièce, alors qu'on ne voit l'image d'une lampe dans un miroir que depuis certaines positions ?
3. Pourquoi une route mouillée, la nuit, éblouit-elle davantage qu'une route sèche ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un rayon fait 18° avec la surface d'un miroir plan. Donne son angle de réflexion par rapport à la normale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Le rayon incident suit la normale au miroir. Quel trajet prend le rayon réfléchi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

L'angle entre les deux demi-droites incidentes et réfléchies, vues depuis le point d'incidence, vaut 86°. Donne l'incidence.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un miroir plan tourne de 7° dans le plan d'incidence, alors que le rayon incident reste fixe. De quel angle tourne le rayon réfléchi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une bougie est à 32 cm d'un miroir plan, sur la normale. À quelle distance de la bougie se trouve son image ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Quel point faut-il relier à l'œil pour trouver où un rayon émis par l'objet arrive sur un miroir plan ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un rayon se réfléchit successivement sur deux miroirs plans perpendiculaires, dans la coupe perpendiculaire à leur arête. Compare sa direction finale à l'initiale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Pourquoi un miroir renvoie-t-il une image nette quand un papier blanc, qui réfléchit aussi, ne le fait pas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un élève annonce que l'angle au miroir vaut 35° à l'arrivée et 55° au retour pour un miroir plan. Est-ce possible si les deux angles sont mesurés depuis la surface ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un objet monte de 6 cm parallèlement à un miroir plan vertical. De combien monte son image ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Réfraction

Exercice 1

Indice de réfraction et vitesse de la lumière : La lumière se propage dans le vide (et quasi à la même vitesse dans l'air) à la célérité $c = 300\,000$ km/s. Dans un milieu transparent d'indice de réfraction n, sa vitesse v est donnée par :

$$v = \frac{c}{n}$$

1. Calculer la vitesse de la lumière dans l'**eau** ($n = 1{,}33$), dans le **verre crown** ($n = 1{,}50$) et dans le **diamant** ($n = 2{,}42$). *(Arrondir au millier de km/s près.)*
2. Un rayon lumineux parcourt 240 000 km en 1,20 s dans un liquide inconnu. Calculer la vitesse v dans ce liquide, puis son indice de réfraction n.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Sens de déviation du rayon réfracté : Un rayon lumineux traverse la surface de séparation plane (le *dioptre*) entre deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2.

1. Lorsqu'un rayon passe de l'**air** ($n_1 = 1{,}00$) dans l'**eau** ($n_2 = 1{,}33$) sous un angle d'incidence $i_1 = 40°$, le rayon réfracté se **rapproche-t-il** ou s'**éloigne-t-il** de la normale ? L'angle réfracté i_2 est-il plus petit ou plus grand que 40° ?
2. Mêmes questions lorsque le rayon passe du **verre** ($n_1 = 1{,}50$) dans l'**air** ($n_2 = 1{,}00$) avec $i_1 = 25°$.
3. Que se passe-t-il si le rayon arrive perpendiculairement à la surface ($i_1 = 0°$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Calculs avec la loi de Snell–Descartes : $n_1 \cdot \sin(i_1) = n_2 \cdot \sin(i_2)$.

Valeurs utiles : $\sin(30°) = 0{,}50$; $\sin(41{,}7°) \approx 0{,}665$; $\sin(48{,}6°) \approx 0{,}75$.

1. Un rayon lumineux passe de l'air ($n_1 = 1{,}00$) dans un bloc de verre ($n_2 = 1{,}50$) avec un angle d'incidence $i_1 = 48{,}6°$. Calculer l'angle de réfraction i_2.
2. Un rayon lumineux sous l'eau ($n_1 = 1{,}33$) arrive vers la surface de l'air ($n_2 = 1{,}00$) avec un angle d'incidence $i_1 = 30°$. Calculer l'angle de réfraction i_2 dans l'air, ainsi que la déviation subie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Un élève cherche à identifier la nature d'un bloc transparent inconnu placé dans l'air ($n_1 = 1{,}00$). Il dirige un faisceau laser vers la face plane avec un angle d'incidence $i_1 = 53{,}1°$ (on donne $\sin(53{,}1°) = 0{,}80$) et mesure à l'intérieur du bloc un angle de réfraction $i_2 = 30°$ ($\sin(30°) = 0{,}50$).

1. Calculer l'indice de réfraction n_2 de ce matériau.

2. À l'aide du tableau ci-dessous, identifier le matériau probable et calculer la vitesse de la lumière dans celui-ci :

Matériau	Eau	Plexiglas	Verre flint léger	Diamant
Indice n	1,33	1,49	1,60	2,42

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Construction géométrique de Maxwell : On souhaite tracer graphiquement le rayon réfléchi et le rayon réfracté sans utiliser la fonction sinus ni la calculatrice, pour un rayon passant de l'**air** ($n_1 = 1{,}0$) vers le **verre** ($n_2 = 1{,}5$) au point d'incidence I, avec une échelle de 4 **cm pour** 1 **unité d'indice**.

1. Quels sont les rayons R_1 et R_2 des deux cercles concentriques c_1 et c_2 à tracer autour du point d'incidence I ?
2. Décrire précisément les étapes de la construction de Maxwell permettant d'obtenir :
   - le point B donnant la direction du **rayon réfléchi** ;
   - le point A donnant la direction du **rayon réfracté**.
3. Comment cette construction fait-elle apparaître **graphiquement** le phénomène de réflexion totale lorsque la lumière va du verre vers l'air sous un grand angle d'incidence ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Réflexion totale interne et angle limite : Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu plus réfringent (n_1) vers un milieu moins réfringent ($n_2 < n_1$), l'**angle limite de réfraction** i_{lim} correspond à un rayon réfracté rasant la surface ($i_2 = 90°$, donc $\sin i_2 = 1$) :

$$\sin(i_{\text{lim}}) = \frac{n_2}{n_1}$$

Valeurs utiles : $\sin(24{,}4°) \approx 0{,}413$; $\sin(41{,}8°) \approx 0{,}667$; $\sin(48{,}8°) \approx 0{,}752$.

1. Calculer l'angle limite i_{lim} pour les trois interfaces suivantes (vers l'air $n_2 = 1{,}00$) :
   - Eau ($n_1 = 1{,}33$) $\rightarrow$ Air ;
   - Verre ($n_1 = 1{,}50$) $\rightarrow$ Air ;
   - Diamant ($n_1 = 2{,}42$) $\rightarrow$ Air.
2. Un rayon dans le verre arrive sur l'interface verre–air sous un angle d'incidence $i_1 = 45°$. Que se passe-t-il ?
3. Pourquoi un diamant taillé brille-t-il beaucoup plus qu'une imitation en verre de même forme ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Applications technologiques : fibre optique et prisme à réflexion totale

1. Une **fibre optique** est constituée d'un *cœur* en verre d'indice $n_{\text{cœur}} = 1{,}52$ entouré d'une *gaine* d'indice $n_{\text{gaine}} = 1{,}46$.
   - Pour guider la lumière dans le cœur par réflexion totale, pourquoi doit-on obligatoirement avoir $n_{\text{cœur}} > n_{\text{gaine}}$?
   - Calculer le rapport $\frac{n_{\text{gaine}}}{n_{\text{cœur}}}$ et en déduire l'angle limite i_{lim} à l'interface cœur–gaine (on donne $\sin(73{,}8°) \approx 0{,}9605$).
2. Dans des jumelles ou certains périscopes, on remplace les miroirs métalliques par un **prisme rectangle isocèle en verre** ($n = 1{,}50$, angles $45° - 90° - 45°$). Un rayon entre perpendiculairement par une face de l'angle droit et frappe l'hypoténuse sous $i_1 = 45°$. Expliquer pourquoi le prisme agit comme un miroir parfait sans perte d'énergie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Illusions d'optique liées à la réfraction (profondeur apparente) :

1. Un pêcheur regarde presque verticalement un poisson immobile dans une rivière d'eau calme ($n = 1{,}33$) à une profondeur réelle de 2,00 m. Le poisson lui paraît-il **plus proche** ou **plus éloigné** de la surface que sa profondeur réelle ? Expliquer en traçant mentalement le chemin des rayons du poisson vers l'œil.
2. En petite approximation près de la verticale, la profondeur apparente vaut $p_{\text{app}} \approx \frac{p_{\text{réelle}}}{n}$. Calculer la profondeur apparente du poisson.
3. Expliquer de la même manière pourquoi une paille plongée obliquement dans un verre d'eau paraît **brisée** à la surface de l'eau.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Phénomènes naturels — Les mirages : En plein été, sur une route asphaltée chauffée par le Soleil (ou dans le désert), un automobiliste croit voir devant lui une **flaque d'eau miroitante** reflétant le ciel ou les phares d'une voiture, qui disparaît lorsqu'il s'en approche.

1. Comment varient la température et l'indice de réfraction n de l'air lorsqu'on se rapproche du sol brûlant ? (Rappel : l'air chaud est moins dense, donc son indice de réfraction est légèrement **plus faible** que celui de l'air froid.)
2. Décrire la trajectoire courbe des rayons lumineux venant du ciel vers l'œil de l'automobiliste (réfraction progressive puis réflexion totale rasant le sol).
3. Pourquoi l'automobiliste a-t-il l'impression que cette lumière bleue vient du sol ? *(Il s'agit d'un mirage inférieur.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Phénomènes naturels — Prisme, dispersion et arc-en-ciel :

1. Lorsque de la lumière blanche traverse un **prisme en verre**, elle se décompose en un spectre coloré continu (du rouge au violet). Expliquer pourquoi le violet est **plus fortement dévié** que le rouge (notion de *milieu dispersif* : $n_{\text{violet}} > n_{\text{rouge}}$).
2. Décrire les 3 **phénomènes optiques successifs** subis par un rayon solaire à l'intérieur d'une goutte d'eau sphérique pour former l'**arc-en-ciel primaire**.
3. Dans quel ordre apparaissent les couleurs de l'arc-en-ciel primaire (de l'extérieur vers l'intérieur de l'arc), sachant que les rayons rouges ressortent sous un angle maximal d'environ 42° par rapport à la direction opposée au Soleil, et les rayons violets sous un angle d'environ 40° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

L'indice de réfraction d'un milieu est $n = \frac{c}{v}$, où $c = 300\,000$ km/s est la vitesse de la lumière dans le vide et v sa vitesse dans le milieu.

1. Dans l'eau, la lumière se propage à environ 225 000 km/s. Calculer l'indice de l'eau.
2. L'indice d'un verre vaut 1,5. Quelle est la vitesse de la lumière dans ce verre ?
3. Un indice peut-il être inférieur à 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un rayon passe de l'air ($n_1 = 1{,}00$) dans l'eau ($n_2 = 1{,}33$) avec un angle d'incidence de 40°.

On donne $\sin 40° \approx 0{,}643$.

1. À l'aide de la loi de Snell–Descartes $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, calculer l'angle de réfraction (au dixième de degré).

2. Le rayon se rapproche-t-il ou s'éloigne-t-il de la normale ?
3. De combien le rayon est-il dévié ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un rayon passe de l'eau ($n_1 = 1{,}33$) vers l'air ($n_2 = 1{,}00$) avec un angle d'incidence de $30°$ ($\sin 30° = 0{,}5$).

1. Calculer l'angle de réfraction (au dixième de degré).
2. Le rayon se rapproche-t-il ou s'éloigne-t-il de la normale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

1. Lorsqu'un rayon passe du verre ($n = 1{,}5$) à l'air, il existe un angle d'incidence limite L au-delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté. Il vérifie $\sin L = \frac{1}{n}$. Calculer L (au dixième).
2. Même question pour l'eau ($n = 1{,}33$).
3. Que se passe-t-il pour un rayon qui arrive dans le verre sur la surface avec une incidence de $50°$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Pour identifier un matériau transparent, on envoie un rayon depuis l'air avec une incidence de $50°$. On mesure un angle de réfraction de $30°$.

On donne $\sin 50° \approx 0{,}766$ et $\sin 30° = 0{,}5$.

Calculer l'indice du matériau. De quel matériau peut-il s'agir parmi : eau (1,33), plexiglas (1,49), verre ordinaire (1,52), diamant (2,42) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un caillou repose au fond d'une rivière de 2 m de profondeur. Regardé presque verticalement depuis la berge, il semble moins profond. Pour une observation proche de la verticale, la profondeur apparente vaut environ $\frac{\text{profondeur réelle}}{n}$ avec $n = 1{,}33$.

1. Calculer la profondeur apparente.
2. Expliquer pourquoi il est dangereux de juger la profondeur d'un bassin à l'œil.
3. Pourquoi une paille plongée dans un verre d'eau paraît-elle cassée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un rayon traverse une vitre (lame de verre à faces parallèles, $n = 1{,}5$). Il arrive sur la première face avec une incidence de $45°$ ($\sin 45° \approx 0{,}707$).

1. Calculer l'angle de réfraction dans le verre.
2. Avec quel angle d'incidence arrive-t-il sur la seconde face ? Avec quel angle ressort-il ?
3. Que peut-on dire du rayon émergent ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

L'indice du verre dépend légèrement de la couleur : $n_{\text{rouge}} = 1{,}51$ et $n_{\text{violet}} = 1{,}53$. Un rayon de lumière blanche arrive depuis l'air sur un bloc de verre avec une incidence de $60°$ ($\sin 60° \approx 0{,}866$).

1. Calculer l'angle de réfraction pour le rouge et pour le violet (au dixième).

2. Quelle couleur est la plus déviée ?
3. Quel phénomène naturel s'explique ainsi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un rayon passe de l'air dans un milieu d'indice n. Pour chacune des situations, dire si elle est possible et justifier :

1. Le rayon arrive avec $i = 0°$ (perpendiculairement à la surface) et est dévié.
2. Le rayon entre dans l'eau avec $i = 60°$ et se réfracte avec $r = 70°$.
3. Le rayon arrive avec $i = 80°$ et il n'y a aucun rayon réfracté (réflexion totale).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un rayon passe de l'air dans un verre d'indice 1,5. Compléter le tableau (angles au dixième de degré) :

i_1	0°	30°	60°	90°
$\sin i_1$	0	0,5	0,866	1
i_2				

L'angle de réfraction est-il proportionnel à l'angle d'incidence ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

La lumière passe du verre d'indice 1,50 vers l'air d'indice 1,00 sous un faible angle non nul. Dans quel sens évolue l'angle avec la normale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Dans un liquide d'indice 1,25, calcule la vitesse de la lumière si celle dans le vide vaut 300 000 km/s.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un rayon arrive à incidence normale entre deux milieux transparents d'indices différents. Donne son angle réfracté.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Le passage se fait de l'air d'indice 1 vers un verre d'indice 1,50 sous une incidence de 45°. Donne l'angle réfracté au dixième de degré.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un rayon passe d'indice 1,60 à 1,00. L'incidence vaut 50°. Y a-t-il un rayon transmis dans le second milieu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un rayon arrive de l'air sur un matériau transparent à 30° de la normale et ressort dans le matériau à 20°. Déduis l'indice en prenant l'air à 1,00, au centième.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une lame de verre à faces parallèles est plongée dans l'air. Quelle relation unit la direction émergente à la direction incidente ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

À la traversée d'une interface entre deux milieux immobiles, la fréquence ou la longueur d'onde du rayon change-t-elle lorsque la vitesse change ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Pourquoi une tige droite plongée obliquement dans l'eau paraît-elle coudée vue de l'air ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une lumière passe d'un milieu d'indice 1,30 à un autre d'indice 1,30. Quelle déviation attend-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site