Congruences — Exercices Physique 9e HarmoS

Exercice 1

On dit que deux entiers a et b sont **congrus modulo** n, noté $a \equiv b \pmod{n}$, s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n (ou de manière équivalente, si n divise $a - b$).

1. Donner le reste (compris entre 0 et $n-1$) de :
   - 47 modulo 5 ;
   - 100 modulo 7 ;
   - -13 modulo 5.
2. Il est actuellement 15 **h** 00 sur une horloge à 24 heures. Quelle heure sera-t-il dans 100 **heures** ? Exprimer ce calcul sous forme d'une congruence modulo 24.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Les congruences sont compatibles avec l'addition, la soustraction et la multiplication : si $a \equiv a' \pmod{n}$ et $b \equiv b' \pmod{n}$, alors $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$ et $a \times b \equiv a' \times b' \pmod{n}$.

Sans effectuer les grands produits, déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. $A = 1\,003 \times 2\,005 + 704$ par 7 ;
2. $B = 2\,025 \times 2\,026 \times 2\,027$ par 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Puissances et congruences :

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 7 ?
2. Quel est le **chiffre des unités** du nombre $7^{2\,026}$ (c'est-à-dire son reste modulo 10) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Démonstration des critères de divisibilité par les congruences :

Soit un nombre à quatre chiffres $N = \overline{mcdu} = m \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + u$.

1. Sachant que $10 \equiv 1 \pmod{9}$, que vaut $10^k \pmod{9}$ pour tout entier $k \geq 1$? En déduire le critère de divisibilité par 9.
2. Sachant que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, calculer $10^1, 10^2, 10^3$ modulo 11. En déduire le critère de divisibilité par 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Clé de contrôle du numéro AVS suisse (norme EAN-13) : Un numéro AVS suisse comporte 13 chiffres (commençant par `756`), dont le 13e chiffre c est une **clé de contrôle** calculée modulo 10.

Pour les 12 premiers chiffres $d_1 d_2 \ldots d_{12}$, on calcule la somme pondérée :

$$S = (d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + 3 \times (d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12})$$

Le chiffre de contrôle $c \in \{0, \ldots, 9\}$ est choisi pour que $S + c \equiv 0 \pmod{10}$.

1. Calculer le chiffre de contrôle c du numéro fictif `756.9217.0769.8c`.
2. Montrer pourquoi ce système détecte automatiquement toute erreur portant sur un seul chiffre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Les jours de la semaine forment un cycle de période 7.

1. Aujourd'hui, nous sommes **mercredi**. Quel jour de la semaine sera-t-on dans exactement 1 000 **jours** ?
2. Sachant que le 1er **janvier** 2026 est un **jeudi**, quel jour de la semaine sera le 1er **janvier** 2030 ? *(Rappel : une année commune compte* 365 *jours et une année bissextile comme* 2028 *compte* 366 *jours.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Retrouver le jour de la semaine d'une date donnée :

On donne pour référence que le 1er **janvier** 2026 est un **jeudi** (2026 n'est pas bissextile).

1. À l'aide des restes modulo 7 des longueurs des mois de janvier à juillet, déterminer quel jour de la semaine tombe la Fête nationale suisse du 1er **août** 2026.
2. Vérifier que le 14 **mars** 2026 est un **samedi**, puis remonter dans le temps pour retrouver quel jour de la semaine est né Albert Einstein, le 14 **mars** 1879. *(Rappel du calendrier grégorien : une année est bissextile si elle est divisible par* 4*, sauf les siècles non divisibles par* 400 *: ainsi* 1900 *n'était pas bissextile, mais* 2000 *l'était.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

1. Résoudre la congruence suivante (trouver tous les entiers x modulo 7) :

$$3x \equiv 4 \pmod 7$$

2. Un système de deux engrenages donne un entier naturel N vérifiant simultanément :

$$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod 5 \\ N \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$$

   Déterminer le plus petit entier naturel N solution de ce système, puis décrire l'ensemble de toutes les solutions positives.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Calcul de la date de Pâques (algorithme de Gauss) : Depuis le concile de Nicée (325), Pâques est fixée au *premier dimanche suivant la pleine lune de printemps.*

Pour toute année Y comprise entre 1900 et 2099, le mathématicien Carl Friedrich Gauss a établi l'algorithme suivant basé sur des congruences :

- $a \equiv Y \pmod{19}$ *(cycle lunaire de Méton)*
- $b \equiv Y \pmod 4$ et $c \equiv Y \pmod 7$ *(cycle des jours de la semaine)*
- $d \equiv (19a + 24) \pmod{30}$ *(nombre de jours après le 21 mars jusqu'à la pleine lune pascale)*
- $e \equiv (2b + 4c + 6d + 5) \pmod 7$ *(nombre de jours jusqu'au dimanche suivant)*

La date de Pâques est alors le $(22 + d + e)$ **mars** (si ce nombre dépasse 31, on soustrait 31 pour obtenir le jour en **avril**).

Appliquer cet algorithme étape par étape pour déterminer la date exacte de Pâques en $Y = 2026$ (puis vérifier qu'il s'agit bien d'un dimanche en sachant que le 1er janvier 2026 est un jeudi).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Démonstrations par congruences :

1. À l'aide d'un tableau de congruences modulo 3, montrer que pour tout entier n, $n^3 - n$ est divisible par 3. En déduire que $n^3 - n$ est toujours divisible par 6.
2. Montrer que le carré d'un entier quelconque n^2 ne peut être congru qu'à 0 **ou** 1 **modulo** 4. En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = 2\,027$ n'a **aucune solution entière**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

1. Calculer le reste de la division de 47 par 5, puis celui de -8 par 5 (le reste doit être compris entre 0 et 4).
2. A-t-on $47 \equiv -8 \pmod 5$? Justifier de deux façons.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

1. Calculer les derniers chiffres de 7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5. Que remarque-t-on ?
2. En déduire le chiffre des unités de 7^{2026}.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Quel est le reste de la division de 3^{50} par 8 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Il est 9 h du matin.

1. Quelle heure sera-t-il dans 50 heures (sur une horloge de 24 h) ?
2. Quelle heure indiquera une horloge à aiguilles (cycle de 12 h) dans 50 heures ?
3. Quelle heure était-il il y a 100 heures (horloge de 24 h) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

1. Quels sont les restes possibles du carré d'un entier dans la division par 4 ? (Étudier n pair et n impair.)
2. En déduire les restes possibles d'une somme de deux carrés modulo 4.
3. Le nombre 2 027 peut-il s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

1. Montrer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, puis que $100 \equiv 1$ et $1\,000 \equiv -1 \pmod{11}$.
2. En déduire le critère de divisibilité par 11 (somme alternée des chiffres).
3. Tester si 918 082 est divisible par 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

1. Résoudre $5x \equiv 3 \pmod 7$ en testant les valeurs de x de 0 à 6.
2. Donner toutes les solutions entières comprises entre 0 et 30.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La preuve par 9 utilise le fait qu'un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

1. Un élève a calculé $347 \times 526 = 182\,522$. Vérifier ce résultat par la preuve par 9.
2. Un autre élève a trouvé 182 252. La preuve par 9 détecte-t-elle l'erreur ? Pourquoi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

1. Calculer $n^2 \bmod 3$ pour $n \equiv 0$, 1 et 2 (mod 3).
2. En déduire que $n^2 + 1$ n'est jamais divisible par 3.
3. $n^2 + 2$ peut-il être divisible par 3 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Le 1er janvier 2026 était un jeudi. L'année 2026 n'est pas bissextile.

1. Quel est le rang du 25 décembre dans l'année ?
2. Quel jour de la semaine sera le 25 décembre 2026 ?
3. Quel jour de la semaine sera le 1er janvier 2027 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Quel est le reste de 173 modulo 12 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Donne le représentant de -33 modulo 7 entre 0 et 6.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

98 et 35 sont-ils congrus modulo 9 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Aujourd'hui on est jeudi. Quel jour sera-t-on dans 52 jours ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Calcule le reste de 29×38 modulo 7 sans développer.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Quel est le dernier chiffre de 7^4 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Quel x de 0 à 10 rend x + 5 congru à 2 modulo 11 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Quel est le plus petit entier positif congru à 4 modulo 6 et à 1 modulo 5 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Pour quels modules positifs 26 est-il congru à 14 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Donne le reste de 3^6 modulo 4.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site