Table des matières

Exercices corrigés de physique de 11e HarmoS **1**
Logique . . . 1
Stratégies . . . 6
Casse-têtes . . . 11
Dénombrement . . . 16
Probabilités . . . 20
Complément de calcul littéral . . . 25
Accent sur le premier degré . . . 30
Accent sur le second degré . . . 34
Constructions de lieux . . . 38
Étude de lieux . . . 43
Transformations d'énergies . . . 48
Énergie en puissance . . . 53
Calorimétrie . . . 57

Exercices corrigés de physique de 11e HarmoS

Logique

Exercice 1

Sur l'île des Véridiques (disant toujours la vérité) et des Menteurs (mentant toujours), vous rencontrez trois habitants **A**, **B** et **C** :

- **A :** « Exactement un seul d'entre nous trois est un Menteur. »
- **B :** « Exactement deux d'entre nous trois sont des Menteurs. »
- **C :** « Nous sommes tous les trois des Menteurs. »

Déterminer le statut de A, B et C en justifiant chaque étape.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Paradoxes logiques et autoréférence :

1. **Le paradoxe d'Épiménide / du menteur :** On considère la phrase P : *« Cette phrase est fausse. »* Expliquer pourquoi P ne peut être ni vraie, ni fausse.
2. **Le paradoxe du barbier (Bertrand Russell) :** Dans un village, un règlement stipule : *« Le barbier rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et uniquement ceux-là. »* À la question *« Qui rase le barbier ? »*, montrer qu'une contradiction apparaît dans les deux cas, et quelle condition cachée du village rendait l'énoncé impossible.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Implication logique et contraposée : On considère la règle suivante dans un laboratoire : *« Si la lampe rouge est allumée (R), alors le capteur thermique est actif (C). »* ($R \implies C$).

1. Parmi les quatre observations ci-dessous, lesquelles **respectent** la règle et lesquelles la **violent** ?
   - (a) Lampe rouge allumée, capteur actif ;
   - (b) Lampe rouge allumée, capteur inactif ;
   - (c) Lampe rouge éteinte, capteur actif ;
   - (d) Lampe rouge éteinte, capteur inactif.
2. Écrire la **contraposée** et la **réciproque** de l'implication $R \implies C$. Laquelle des deux est toujours logiquement équivalente à la règle initiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Le test de sélection de Wason : Quatre fiches d'expérience sont posées sur une table. Chaque fiche porte d'un côté le nom d'un métal ou plastique (**Cuivre**, **Plastique**) et de l'autre côté une mention (**Conducteur**, **Isolant**). Les faces visibles sont :

Cuivre	Plastique	Conducteur	Isolant

On veut vérifier la règle : *« Si une fiche porte **Cuivre** d'un côté, alors elle porte **Conducteur** de l'autre côté. »*

Quelles fiches (et **uniquement** celles-là) devez-vous impérativement retourner pour tester cette règle avec certitude ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Dans une volée de 120 **élèves** de 11e HarmoS :

- 72 élèves suivent l'option **Physique** (P) ;
- 60 élèves suivent l'option **Informatique** (I) ;
- 24 élèves ne suivent aucune de ces deux options.

1. À l'aide d'un diagramme de Venn, déterminer le nombre d'élèves qui suivent :
   - les **deux** options à la fois ($P \cap I$) ;
   - **uniquement** la Physique ;
   - **uniquement** l'Informatique ;
   - **exactement une** des deux options (ou exclusif).
2. Quelle fraction des élèves de Physique suit également l'Informatique ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Lors d'un congrès du CERN à Genève réunissant 100 **chercheurs**, chaque chercheur parle au moins l'une des trois langues suivantes : **Français** (F), **Allemand** (A) ou **Anglais** (E).

On dispose des statistiques suivantes :

- 50 parlent Français, 43 parlent Allemand et 57 parlent Anglais ;
- 18 parlent à la fois Français et Allemand ;
- 22 parlent à la fois Français et Anglais ;
- 20 parlent à la fois Allemand et Anglais.

1. En utilisant la formule d'inclusion–exclusion pour 3 ensembles, calculer le nombre x de chercheurs qui maîtrisent les **trois langues** à la fois.
2. Compléter les 7 zones du diagramme de Venn et en déduire combien de chercheurs ne parlent **qu'une seule** de ces trois langues.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Trois coffres **A**, **B** et **C** contiennent l'un un **diamant**, un autre de l'**or**, et le troisième est **vide**. Chaque coffre porte une inscription :

- **Coffre A :** « Le diamant est dans le coffre B. »
- **Coffre B :** « Ce coffre-ci n'est pas vide. »
- **Coffre C :** « L'or est dans le coffre A. »

On sait que **l'inscription du coffre contenant le diamant est vraie**, tandis que **les inscriptions des deux autres coffres sont fausses**.

Déterminer le contenu exact de chacun des trois coffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Le paradoxe de Monty Hall (raisonnement conditionnel) : Dans un jeu télévisé, un cadeau est caché derrière l'une de **trois portes fermées** (1, 2 ou 3), et les deux autres cachent une chèvre.

1. Vous choisissez la **porte 1**. Quelle est la probabilité que le cadeau soit derrière votre porte ? et derrière l'ensemble des deux autres portes (2 ou 3) ?
2. Le présentateur (qui **sait** où est le cadeau) ouvre alors l'une des deux autres portes contenant une chèvre — par exemple la **porte 3** — et vous propose de **changer votre choix** pour prendre la porte 2.
3. En listant les 3 **emplacements équiprobables** possibles du cadeau, montrer pourquoi vous avez intérêt à **changer de porte**, et quelles sont vos chances de gagner si vous gardez la porte 1 contre si vous changez pour la porte 2.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Cinq échantillons de métaux alcalins (**Lithium**, **Sodium**, **Potassium**, **Rubidium**, **Césium**) sont rangés dans cinq tiroirs numérotés de 1 à 5 (de gauche à droite), un par tiroir :

1. Le **Potassium** se trouve dans un tiroir de numéro impair, mais à aucune des deux extrémités (1 ou 5).
2. Le **Lithium** est placé immédiatement à gauche du **Césium**.
3. Le **Césium** ne se trouve pas dans le tiroir 2.
4. Le **Sodium** porte un numéro de tiroir strictement supérieur à celui du **Rubidium**.

Retrouver le contenu exact des tiroirs 1 à 5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Lois de De Morgan et logique des circuits : Soient A et B deux propositions logiques (pouvant valoir Vrai $= 1$ ou Faux $= 0$). On note $\overline{A}$ la négation de A.

1. À l'aide d'une **table de vérité** à 4 lignes, démontrer la première loi de De Morgan :

$$\overline{A \text{ ET } B} \equiv \overline{A} \text{ OU } \overline{B}$$

2. En déduire la négation logique correcte de chacune des deux phrases suivantes :
   - « L'interrupteur A est fermé **et** la lampe B est allumée. »
   - « Le nombre x vérifie $x \geq 2$ **et** $x < 5$. » (Écrire la négation sous forme de réunion d'intervalles avec « ou ».)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Parmi les entiers de 1 à 30, combien sont divisibles par 2 ou par 3, mais pas par les deux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Nora affirme que les 5 lampes fonctionnent. Donne la négation logique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Quatre cartes montrent 10, 11, A et B, chacune avec un entier d'un côté et une lettre de l'autre. Pour vérifier « si A, alors nombre pair », quelles cartes retourner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un programme refuse toute mesure inférieure à 5. Une mesure a été acceptée. Quelle borne déduis-tu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un panier contient 5 valeurs positives et deux valeurs nulles. Réfute « toutes les valeurs sont strictement positives ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Quatre décisions sont binaires. Combien de configurations rendent vraie la proposition « exactement trois décisions sont positives » ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Si P alors Q. Peut-on avoir simultanément P vrai et Q faux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Justifie l'équivalence entre « ni P ni Q » et « P est faux et Q est faux ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair. Explique le sens du carré pair vers le nombre pair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trois boutons activent un voyant lorsque le nombre de boutons fermés est impair. Combien y a-t-il de configurations d'allumage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

L'implication « $A \Rightarrow B$ » (« si A, alors B ») n'est fausse que lorsque A est vraie et B fausse.

1. Dresser sa table de vérité.
2. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   - « Si $2+2=4$, alors Berne est en Suisse. »
   - « Si $2+2=4$, alors $3>5$. »
   - « Si $2+2=5$, alors la Lune est en fromage. »

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Démontrer l'équivalence : « un entier n est pair **si et seulement si** n^2 est pair ».

1. Démontrer le sens direct : si n est pair, alors n^2 est pair.
2. Démontrer la réciproque en utilisant la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Pour chaque phrase, dire si elle est vraie ou fausse, puis écrire sa négation :

1. « Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0$. »
2. « Il existe un nombre réel x tel que $x^2 < 0$. »
3. « Pour tout nombre réel x, $x^2 > x$. »

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Démontrer **par l'absurde** qu'il n'existe pas de plus grand nombre pair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Deux gardiens surveillent deux portes : l'une mène à la liberté, l'autre en prison. L'un des gardiens dit toujours la vérité, l'autre ment toujours, mais on ne sait pas lequel. On ne peut poser **qu'une seule question** à **un seul** gardien.

Quelle question poser pour trouver la bonne porte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Trois maisons alignées (positions 1, 2, 3 de gauche à droite) sont rouge, verte et bleue, et habitées par un Suisse, une Italienne et un Français.

- L'Italienne habite la maison rouge.
- La maison verte est immédiatement à droite de la maison rouge.
- Le Suisse habite la maison 1.
- Le Français n'habite pas la maison bleue.

Qui habite où, et de quelle couleur est chaque maison ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On affirme : « pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 - n + 11$ est premier ».

1. Tester $n = 0$, 1, 2, 3, 4.
2. Trouver un contre-exemple sans calcul (penser à $n = 11$).
3. Que retenir sur la démonstration d'une propriété générale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. Démontrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
2. Démontrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
3. La somme de trois nombres impairs est-elle paire ou impaire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On place 5 points à l'intérieur d'un carré de côté 2 cm.

1. En partageant le carré en 4 petits carrés de côté 1 cm, montrer que deux des points sont dans le même petit carré.
2. En déduire que deux des points sont distants d'au plus $\sqrt{2}$ cm $\approx 1{,}41$ cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Démontrer par **contraposée** : « si n^2 est impair, alors n est impair ».

1. Énoncer la contraposée.
2. La démontrer.
3. Pourquoi cela démontre-t-il la propriété initiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Stratégies

Exercice 1

La course à 50 **(stratégie gagnante par raisonnement à l'envers) :** Deux joueurs partent d'un compteur à 0. À tour de rôle, chaque joueur ajoute au compteur un entier compris entre 1 **et** 6. Celui qui atteint exactement 50 gagne la partie.

1. En raisonnant à l'envers depuis 50, quelles sont les **valeurs clés** (positions gagnantes) qu'il faut laisser à son tour pour forcer la victoire ?
2. Le premier joueur a-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, quel nombre doit-il jouer dès son **premier coup**, et comment doit-il répondre ensuite ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Variante « Qui prend la dernière perd » : Sur une table se trouvent 22 **jetons**. Deux joueurs retirent à tour de rôle 1**,** 2 **ou** 3 **jetons**, mais cette fois, **celui qui est forcé de prendre le dernier jeton a PERDU**.

1. Quelle est la position à laisser à l'adversaire juste avant la fin ? En déduire la suite complète des positions gagnantes à laisser à l'adversaire.
2. Le premier joueur peut-il gagner à coup sûr ? Combien de jetons doit-il retirer au premier coup ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Jeu de Nim à deux tas (stratégie par symétrie) : Sur une table se trouvent deux tas contenant respectivement 12 **pièces** et 8 **pièces**. À chaque tour, un joueur choisit **un seul des deux tas** et y retire le nombre de pièces qu'il souhaite (au moins 1, jusqu'à tout le tas). Celui qui prend la dernière pièce gagne.

1. Si les deux tas ont la **même taille** $(n; n)$ au moment où c'est à l'adversaire de jouer, expliquer pourquoi vous êtes assuré de gagner.
2. Pour le départ $(12; 8)$, quel coup exact doit jouer le premier joueur pour s'assurer la victoire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Stratégie de symétrie centrale sur une table ronde : Deux joueurs posent à tour de rôle une pièce de 1 CHF sur une table circulaire (sans qu'aucune pièce ne se chevauche ni ne dépasse du bord). Le premier qui ne trouve plus de place libre pour poser une pièce a perdu.

Le **premier joueur** a une stratégie gagnante infaillible (quel que soit le rayon de la table, pourvu qu'elle soit plus grande qu'une pièce).

1. Où le premier joueur doit-il poser sa toute **première pièce** ?
2. Où doit-il poser chacune de ses pièces suivantes en réponse à l'adversaire, et pourquoi est-il certain de toujours trouver une place libre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Raisonnement à l'envers (le voyageur aux 3 péages) : Un marchand part avec un certain nombre entier N_0 de pièces d'or et traverse successivement 3 **villes**. À l'entrée de chaque ville, il doit payer la **moitié de ce qu'il possède plus 1 pièce**.

Après avoir payé le 3e péage, il ne lui reste plus que 1 **seule pièce d'or**.

Combien de pièces N_0 avait-il au tout début de son voyage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Induction à rebours (le partage des 4 pirates) : Quatre pirates — le capitaine **A**, puis **B**, **C** et **D** (du plus ancien au plus jeune) — doivent se partager 100 **pièces d'or**.

Le capitaine le plus ancien propose une répartition en nombres entiers. Tous les pirates vivants (y compris lui) votent : si **au moins la moitié** des votes sont favorables ($\geq 50\%$), le partage est adopté ; sinon, le capitaine est jeté par-dessus bord et le suivant fait une proposition.

Chaque pirate est parfaitement logique et cherche : 1) à survivre ; 2) à gagner le plus d'or possible ; 3) à gain égal, à voter **NON**.

En raisonnant à l'envers (en commençant par le cas où il ne reste que 2 pirates), quelle répartition optimale **A** doit-il proposer pour survivre et garder le maximum de pièces ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Le jeu de Chomp sur tablette de chocolat (2×5) : Une tablette de chocolat possède 2 lignes et 5 colonnes (10 carrés). Le carré tout en **bas à gauche** est empoisonné.

À tour de rôle, chaque joueur choisit un carré encore présent et mange **ce carré ainsi que tous ceux situés au-dessus et à sa droite**. Le joueur forcé de manger le carré empoisonné a perdu.

1. Quel carré le **premier joueur** doit-il manger dès son premier coup pour garantir sa victoire ?
2. Quelle forme générale de tablette (« invariant gagnant ») doit-il ensuite maintenir à la fin de chacun de ses tours ? Tester sa réponse si le second joueur mange toute la 3e colonne (en choisissant le carré du bas de la colonne 3).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Le jeu du 15 (isomorphisme avec le Morpion) : On dispose des 9 cartes numérotées de 1 à 9. Deux joueurs choisissent à tour de rôle une carte restante. Le premier qui possède parmi ses cartes **exactement 3 cartes dont la somme vaut** 15 gagne.

1. Vérifier que dans le carré magique ci-dessous, toutes les lignes, colonnes et diagonales de 3 cases ont pour somme 15 (et qu'il n'existe aucun autre triplet de somme 15 parmi $\{1, \ldots, 9\}$) :

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2. Le premier joueur choisit 5, le second joueur choisit 9, puis le premier joueur choisit 4. Quelle carte le second joueur est-il **forcé** de prendre pour éviter de perdre immédiatement ?
3. Quelle carte le premier joueur doit-il alors jouer pour créer une **double menace** imparable (deux triplets gagnants simultanés) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Problème d'anticipation (la traversée du désert avec dépôt) : Un véhicule doit traverser une piste désertique de 500 **km**. Son réservoir a une capacité maximale de 40 **L** et il consomme exactement 1 **L pour** 10 **km** (soit une autonomie maximale de 400 km). Il dispose d'une réserve d'essence au point de départ (0 km) et peut faire un aller-retour pour laisser un bidon en dépôt le long de la piste.

1. Pourquoi est-il impossible de faire le dépôt à 200 km du départ ?
2. En raisonnant **à l'envers depuis l'arrivée (**500 **km)**, à quelle distance maximale du départ doit se situer le dépôt pour pouvoir finir avec un réservoir plein de 40 L ?
3. Décrire le plan complet (quantités d'essence emportées et déposées) permettant d'atteindre les 500 km avec un **minimum de carburant**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Stratégie sur un plateau de jeu (marquage P/G à rebours) : Un pion est placé sur la case de départ 1 d'une piste numérotée de 1 à 12. À chaque tour, un joueur peut avancer le pion soit de +1 **case**, soit de +2 **cases**, soit **doubler** le numéro de sa case (×2), sans jamais dépasser 12. Celui qui amène le pion exactement sur la case 12 gagne.

1. Par **raisonnement à l'envers** depuis la case 12 (case cible : *Perdante* pour celui qui la reçoit, notons **G** les cases d'où l'on gagne en un ou plusieurs coups et **P** les cases perdantes pour celui qui doit y jouer), classer de 12 jusqu'à 1 toutes les cases en **P** ou **G**.
2. Le premier joueur qui part de la case 1 peut-il gagner à coup sûr ? Quel est son premier coup gagnant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Deux joueurs retirent 1 à 5 jetons à tour de rôle. Le dernier jeton gagne. La pile en contient 26. Quel premier retrait permet de forcer le gain ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Trouve un numéro de 1 à 32 avec des questions oui/non. Combien suffisent dans le pire cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une pièce plus lourde est cachée parmi 81 pièces de même aspect. Comment la trouver en 4 pesées sur une balance à plateaux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On avance de 1 ou 2 cases par tour. Donne une plus courte suite pour atteindre 11 depuis zéro.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Parcours les 6 branches d'une étoile qui relient un centre à autant de culs-de-sac, en partant et revenant au centre. Minimum de passages d'arête ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Parmi 9 boutons, un seul ouvre une boîte. Combien de tests au pire pour identifier le bon, sans obligation de l'actionner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On ajoute 1 ou 5 au score, initialement nul. Comment atteindre 26 en un minimum de tours ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On avance sur une frise de la case 0 à la case 9, d'un ou de deux pas, sans toucher la case 4. Quel est le nombre minimal de déplacements ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On teste 36 échantillons avec un dispositif qui répond seulement oui ou non sur la présence d'un échantillon atypique dans un lot. Un seul est atypique. Cinq tests peuvent-ils le distinguer dans tous les cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un jeu part de 0. On ajoute à tour de rôle 1, 2 ou 4. On gagne en atteignant exactement 15. Qui peut forcer le gain ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

La course à 20 **:** deux joueurs disent à tour de rôle un nombre en ajoutant 1 ou 2 au nombre précédent (le premier dit 1 ou 2). Celui qui dit 20 gagne.

1. Quels nombres faut-il dire pour être sûr de gagner ?
2. Le premier joueur peut-il gagner à coup sûr ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Jeu de Nim à trois tas de 3, 4 et 5 allumettes. À tour de rôle, chaque joueur retire autant d'allumettes qu'il veut (au moins une) dans **un seul** tas. Celui qui prend la dernière allumette gagne.

On admet qu'une position est perdante pour celui qui doit jouer si et seulement si la « somme de Nim » des tas (addition binaire sans retenue, notée $\oplus$) vaut 0.

1. Écrire 3, 4 et 5 en binaire et calculer $3 \oplus 4 \oplus 5$.
2. Le premier joueur a-t-il une stratégie gagnante ? Quel coup doit-il jouer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Deux joueurs posent à tour de rôle un domino (qui recouvre exactement 2 cases voisines) sur un échiquier 8×8, sans chevauchement. Celui qui ne peut plus jouer perd.

Montrer que le **second** joueur peut gagner à coup sûr en utilisant la symétrie par rapport au centre de l'échiquier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un vieil homme distribue ses pommes à trois enfants. Il donne au premier la moitié de ses pommes plus une demi-pomme ; au deuxième la moitié de ce qui reste plus une demi-pomme ; au troisième la moitié de ce qui reste plus une demi-pomme. Il ne lui reste plus rien, et il n'a jamais coupé de pomme.

Combien de pommes avait-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

On dispose de pièces de 5, 2, 1, 0,50, 0,20, 0,10 et 0,05 CHF en quantité illimitée.

1. Rendre 3,85 CHF avec le moins de pièces possible, en prenant toujours la plus grande pièce possible (méthode « gloutonne »).
2. Dans un pays imaginaire, les pièces valent 1, 3 et 4. Appliquer la méthode gloutonne pour rendre 6. Est-ce optimal ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un tas contient 100 jetons. À chaque coup, on peut ajouter ou retirer 6 ou 9 jetons.

Peut-on arriver à 0 jeton ? Justifier par un **invariant**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une école doit organiser les examens de cinq branches A, B, C, D, E. Deux branches ne peuvent pas avoir lieu en même temps si un élève suit les deux. Les incompatibilités sont : A–B, A–C, B–C, C–D, D–E.

1. Pourquoi faut-il au moins 3 créneaux ?
2. Proposer un planning avec 3 créneaux.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Les routes entre cinq villages ont les longueurs suivantes (en km) :

$$A\text{–}B : 4 \quad A\text{–}C : 2 \quad C\text{–}B : 1 \quad B\text{–}D : 5 \quad C\text{–}D : 8 \quad D\text{–}E : 3 \quad B\text{–}E : 9$$

Trouver le plus court chemin de A à E en calculant, de proche en proche, la distance minimale de A à chaque village.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Pour construire un abri, on doit réaliser les tâches suivantes (durées en jours) :

- T_1 : fondations (3 j)
- T_2 : commander le bois (5 j), peut commencer immédiatement

- T_3 : monter les murs (4 j), après T_1 et T_2
- T_4 : installer l'électricité (2 j), après T_3
- T_5 : poser le toit (3 j), après T_3
- T_6 : peinture (2 j), après T_4 et T_5

Avec assez d'ouvriers pour travailler en parallèle, quelle est la durée minimale du chantier ? Quelles tâches ne doivent subir aucun retard ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Estimation de Fermi : combien de fois le cœur d'une personne bat-il au cours d'une vie de 80 ans ?

1. Proposer une estimation du nombre de battements par minute.
2. Calculer un ordre de grandeur du nombre total de battements (notation scientifique).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Casse-têtes

Exercice 1

Découpe en escalier (transformer un rectangle 9×4 en un carré 6×6) : On dispose d'une plaque rectangulaire de longueur 9 cm et de largeur 4 cm.

1. Quelle est l'aire de ce rectangle, et quel doit être le côté d'un carré de même aire ?
2. Comment découper ce rectangle en **seulement 2 morceaux superposables/assemblables par translation** (sans retourner ni pivoter) pour former un carré 6×6 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Partager un rectangle en 3 et en 5 parties égales sans règle graduée : Vous disposez d'une feuille rectangulaire $ABCD$ (sans aucune graduation, mais vous pouvez plier ou tracer des diagonales/médianes à la règle non graduée).

1. Expliquer comment partager exactement la longueur $[AB]$ en 3 **tiers égaux** en traçant uniquement le milieu M de $[CD]$ et les segments $[AM]$, $[BD]$ (ou $[AC]$ et $[BM]$).
2. Comment adapter cette astuce géométrique (théorème de Thalès) pour partager un rectangle en 5 **cinquièmes égaux** sans instrument gradué ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Découpe d'une croix grecque en un carré : Une croix grecque est formée de 5 **carrés de côté 1 dm** (un carré central entouré de 4 carrés collés sur ses 4 côtés).

1. Quelle est l'aire totale de cette croix, et quelle est donc la longueur exacte c du côté d'un carré de même aire ?
2. Sur le contour de la croix, repérer deux sommets dont la distance vaut exactement $c = \sqrt{5}$ dm.
3. Comment découper la croix en 4 **morceaux superposables** à l'aide de deux coupes droites perpendiculaires passant par son centre pour reconstituer ce carré ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Retournements de verres sous contrainte : Sur une table sont alignés 7 **verres**, tous posés à l'envers (ouverture vers le bas). À chaque opération, vous devez choisir **exactement** 4 **verres** et les retourner tous les 4 en même temps.

1. Est-il possible, en répétant cette opération, de remettre finalement **tous les 7 verres à l'endroit** (ouverture vers le haut) ? Justifier rigoureusement par un **invariant de parité**.
2. Quelle est la réponse si l'on doit retourner **exactement 3 verres** à chaque coup (au lieu de 4) ? Donner alors une séquence minimale de coups.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Le défi des pièces dans l'obscurité : Dans une pièce totalement sombre, on étale devant vous 20 **pièces de monnaie** sur une table. Vous savez au toucher qu'il y a 20 pièces, mais il est impossible de distinguer *pile* de *face* dans le noir. On vous informe simplement qu'il y a **exactement 7 pièces côté Pile** et 13 pièces côté Face.

On vous demande de séparer ces 20 pièces en **deux tas** (pas forcément de même taille) contenant **exactement le même nombre de pièces côté Pile** (en ayant le droit de retourner autant de pièces que vous le souhaitez avant de quitter la pièce).

Quelle manipulation simple réussit à coup sûr, quel que soit le hasard ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le tri des crêpes : Quatre crêpes de diamètres différents (1 la plus petite, 4 la plus grande) sont empilées dans le désordre, de haut en bas : $[3, 1, 4, 2]$.

La seule opération autorisée consiste à glisser une spatule sous l'une des crêpes et à **retourner d'un bloc tout le sommet de la pile** au-dessus de la spatule (par exemple, en glissant sous le 4 de $[3, 1, 4, 2]$, le haut devient $[4, 1, 3, 2]$).

Trouver une suite de coups permettant de ranger les crêpes de la plus petite en haut à la plus grande en bas ($[1, 2, 3, 4]$) en au plus 4 **retournements**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Les Tours de Hanoï : Trois piquets A, B, C supportent n disques de diamètres décroissants empilés sur A. On veut déplacer toute la tour vers C en ne déplaçant qu'un disque à la fois et sans jamais poser un grand disque sur un plus petit.

1. Donner la séquence minimale de déplacements pour $n = 3$ **disques** (1 le plus petit, 3 le plus grand) et compter le nombre de coups H_3.
2. Expliquer pourquoi pour n disques, le nombre minimal de coups vérifie $H_n = 2H_{n-1} + 1$, et vérifier que $H_n = 2^n - 1$.
3. À raison d'1 disque déplacé par seconde, combien de temps faudrait-il pour déplacer $n = 20$ disques ($2^{20} = 1\,048\,576$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Problème de transbordement sous contraintes : Trois couples de scientifiques (A_1, A_2, A_3 et leurs assistants respectifs B_1, B_2, B_3? Utilisons plutôt 3 robots lourds de 90 kg et 2 petits robots de 45 kg, ou le classique *« 3 loups et 3 moutons »* / *« 2 adultes et 2 enfants »*) : prenons une barque ne supportant au maximum que 100 **kg**.

Deux physiciens pesant chacun 80 **kg** et deux stagiaires pesant chacun 45 **kg** veulent traverser une rivière avec cette barque (qui ne peut pas naviguer à vide).

1. Quel est le nombre minimal de traversées (allers et retours) pour faire passer tout le monde sur l'autre rive ?
2. Détailler l'ordre exact des traversées.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Coloriage et parcours sous contrainte : Une souris parcourt les 25 pièces d'un labyrinthe carré 5×5 (numérotées en damier comme un échiquier, avec les 4 coins de couleur **noire**, donc 13 cases noires et 12 cases blanches). À chaque pas, elle passe d'une pièce à une pièce voisine (haut, bas, gauche ou droite).

1. La souris peut-elle visiter **toutes les** 25 **pièces exactement une fois** en partant d'une case **noire** ? Et en partant d'une case **blanche** ? Justifier.
2. Peut-elle effectuer un **circuit fermé** (revenir à son point de départ après avoir visité exactement une fois chacune des 25 pièces) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Triage de wagons (voie de garage en cul-de-sac) : Un train arrive de la droite avec 4 wagons dans l'ordre $1-2-3-4$ (le 1 devant à gauche, le 4 derrière à droite) et doit repartir vers la gauche.

Au milieu de la voie se trouve une **voie de garage en cul-de-sac** (fonctionnant comme une *pile* : le dernier wagon entré sur la voie de garage est le premier à pouvoir en sortir). Chaque wagon peut soit continuer directement vers la sortie à gauche, soit entrer sur la voie de garage puis en ressortir plus tard vers la gauche (jamais revenir en arrière vers la droite).

1. Montrer comment obtenir l'ordre de sortie $2-4-3-1$.
2. Pourquoi est-il **impossible** d'obtenir l'ordre de sortie $3-1-2-4$ (ou tout motif contenant « $3 \dots 1 \dots 2$ ») ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un damier de 14 par 14 cases perd une case. Peut-on couvrir le reste exactement avec des dominos de deux cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Insère les signes $+$, $-$ ou $\times$ pour faire 31 avec, dans l'ordre, 7, 4, 2 et 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Avec les chiffres 1, 2 et 7 utilisés une fois par nombre, donne la plus grande différence entre deux nombres de trois chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un cube peint sur ses faces est découpé en $7 \times 7 \times 7$ petits cubes. Combien ont trois faces peintes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Apparie les nombres de 1 à 14 pour que toutes les paires aient la même somme.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Combien de carrés de 2×2 cases contient une grille de 7×7 cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un escargot monte de 7 m par jour et redescend de 5 m par nuit. Quand sort-il d'un puits de 13 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un damier de 6×6 perd trois cases noires et une case blanche. Le reste peut-il être couvert exactement avec des dominos qui occupent deux cases voisines ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Dans un tournoi à élimination directe avec 31 participants, combien de matchs faut-il pour désigner un seul gagnant, même si un participant passe un tour sans jouer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Deux éléments sont posés initialement sur leur face A. En un coup on retourne un seul élément. Combien de configurations peuvent être obtenues en exactement trois coups ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un recenseur demande à une mère l'âge de ses trois enfants.

- « Le produit de leurs âges vaut 36. »
- « La somme de leurs âges est égale au numéro de la maison d'en face. » Le recenseur regarde le numéro, réfléchit et dit : « Il me manque une information. »
- « L'aîné joue du piano. »

Quels sont les âges des enfants ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une bouteille et son bouchon coûtent ensemble 1,10 CHF. La bouteille coûte 1 CHF de plus que le bouchon.

1. Quelle réponse « intuitive » donne-t-on souvent ? Pourquoi est-elle fausse ?
2. Combien coûte le bouchon ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Trois volumes d'une encyclopédie sont rangés dans l'ordre (volume 1 à gauche, volume 3 à droite) sur une étagère. Les pages de chaque volume ont une épaisseur totale de 5 cm et chaque couverture a une épaisseur de 0,25 cm.

Un ver ronge depuis la **première page** du volume 1 jusqu'à la **dernière page** du volume 3, en ligne droite. Quelle distance parcourt-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux trains roulent l'un vers l'autre sur la même voie, chacun à 50 km/h ; ils sont à 100 km l'un de l'autre. Une mouche part du premier train à 75 km/h, fait l'aller-retour entre les deux trains sans cesse, jusqu'à ce qu'ils se croisent (par chance, sur une double voie !).

Quelle distance totale la mouche parcourt-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un tournoi de tennis à élimination directe réunit 64 joueurs.

1. Combien de matchs faut-il jouer pour désigner le vainqueur ?
2. Même question avec 100 joueurs (certains sont exemptés au premier tour).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une horloge sonne 6 coups en 5 secondes (le temps est mesuré du premier au dernier coup).

Combien de temps lui faut-il pour sonner 12 coups ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un couloir comporte 100 casiers fermés, numérotés de 1 à 100. Un premier élève ouvre tous les casiers. Le deuxième change l'état (ouvre si fermé, ferme si ouvert) de tous les casiers multiples de 2. Le troisième change l'état des multiples de 3, et ainsi de suite jusqu'au 100e élève.

1. Combien de fois le casier 12 est-il manipulé ? Est-il ouvert à la fin ?
2. Quels casiers sont ouverts à la fin ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Dans une cave, trois interrupteurs commandent une ampoule située au grenier (un seul des trois est le bon). Depuis la cave, on ne voit pas l'ampoule. On peut manipuler les interrupteurs autant qu'on veut, mais on ne peut monter au grenier qu'**une seule fois**.

Comment trouver le bon interrupteur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un escargot parcourt un élastique de 1 m à la vitesse de 1 cm par minute. Problème simplifié : à la fin de chaque minute, on étire instantanément l'élastique de 1 m supplémentaire (uniformément, l'escargot étant emporté avec la portion où il se trouve).

1. Quelle fraction de l'élastique l'escargot a-t-il parcourue après la 1re minute ? Après l'étirement, cette fraction change-t-elle ?
2. Pendant la 2e minute, quelle fraction supplémentaire parcourt-il ?
3. Expliquer pourquoi l'escargot finira par arriver au bout (en admettant que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ dépasse n'importe quel nombre).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On a 10 sacs de 10 pièces. Dans 9 sacs, les pièces pèsent 10 g ; dans un sac, elles pèsent toutes 11 g. Avec une balance électronique, trouver le sac de pièces lourdes en **une seule** pesée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Dénombrement

Exercice 1

Principe multiplicatif et arbres de choix : Un restaurant scientifique propose une formule composée d'une entrée (au choix parmi 3), d'un plat (au choix parmi 4) et d'un dessert (au choix parmi 2).

1. Combien de menus complets différents peut-on composer ?
2. Un cadenas à 4 molettes utilise les chiffres de 0 à 9 (avec répétitions possibles). Combien de codes différents existe-t-il ?
3. Combien de ces codes à 4 chiffres ne contiennent **aucun chiffre pair** $(0, 2, 4, 6, 8)$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Permutations sans répétition et avec contrainte : Cinq coureurs (**Alice**, **Bastien**, **Chloé**, **David**, **Éva**) participent à une finale de 100 m (sans ex æquo).

1. Combien de classements complets différents (de la 1re à la 5e place) sont possibles ?
2. Combien de classements existent si **Alice et Bastien** doivent impérativement être **côte à côte** dans le classement (l'un juste devant l'autre) ?
3. Combien de classements existent si **Alice** arrive quelque part **devant Bastien** (pas nécessairement juste devant) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Permutations avec répétition (anagrammes) :

1. Combien d'anagrammes (avec ou sans sens) peut-on former avec toutes les lettres du mot `PRISME` (6 lettres toutes distinctes) ?
2. Combien d'anagrammes distincts peut-on former avec toutes les lettres du mot `OPTIQUE` (7 lettres distinctes) ? et du mot `ATOME` (5 lettres distinctes) ?
3. Combien d'anagrammes distincts peut-on former avec toutes les lettres du mot `MASSE` (5 lettres, dont deux `S`), puis du mot `ENERGIE` (7 lettres, dont trois `E`) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Arrangements sans répétition ($A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$) : Une classe de 12 élèves doit élire un **comité** de 3 personnes occupant des fonctions différentes : **un(e) président(e)**, **un(e) secrétaire** et **un(e) trésorier(ère)** (sans cumul possible).

1. Combien de comités différents peut-on former ?
2. Combien de comités peut-on former si **Léa** doit obligatoirement faire partie du comité (à l'un des 3 postes) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Combinaisons sans répétition ($\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$) : Dans la même classe de 12 élèves, on souhaite cette fois choisir une **délégation de 3 élèves** sans hiérarchie ni rôles distincts (l'ordre ne compte pas).

1. En expliquant le lien avec l'exercice précédent (1 320 comités ordonnés), calculer le nombre de délégations de 3 élèves.
2. La classe compte 7 **filles** et 5 **garçons**. Combien de délégations de 3 élèves comportent **exactement 2 filles et 1 garçon** ?
3. Combien de délégations comportent **au moins 1 fille** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Plaques d'immatriculation et mots de passe (dénombrement mixte) : Dans un canton fictif, une plaque d'immatriculation est formée de 2 **lettres distinctes** choisies parmi les 26 lettres majuscules `A-Z`, suivies de 4 **chiffres** (`0-9`, les répétitions étant autorisées, y compris `0000`).

1. Combien de plaques différentes peuvent être émises au total ?
2. Combien de plaques possèdent des chiffres **tous différents** (les 2 lettres distinctes et les 4 chiffres distincts) ?
3. Combien de plaques contiennent **au moins deux chiffres identiques** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Tirage dans une jeu de 36 **cartes (jass suisse) :** Un jeu de jass suisse comporte 36 **cartes** (4 couleurs : Cœur, Carreau, Pique, Trèfle — ou Rose, Grelot, Gland, Bouclier — avec 9 hauteurs chacune : $6, 7, 8, 9, 10$, Valet, Dame, Roi, As).

On distribue une main de 4 **cartes** simultanément (l'ordre n'a pas d'importance).

1. Combien de mains de 4 cartes différentes existe-t-il au total ?
2. Combien de mains contiennent **les** 4 **As** ? **exactement** 3 **As** ?
3. Combien de mains sont composées uniquement de 4 **cartes de la même couleur** (par exemple 4 Cœurs ou 4 Piques, etc.) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Combinaisons avec répétition (méthode des étoiles et des barres) : Un laboratoire achète 8 **flacons** identiques (indiscernables) répartis en 3 **types** d'acides possibles : acide chlorhydrique (H), acide sulfurique (S) ou acide nitrique (N). On peut prendre 0 à 8 flacons de chaque type.

1. En modélisant chaque commande par 8 étoiles (`*`) et 2 séparateurs (`|`) (par exemple `***|**|***` signifie $3\,H + 2\,S + 3\,N$), expliquer pourquoi le nombre de commandes possibles vaut $\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2}$. Calculer ce nombre.
2. Combien de commandes différentes existe-t-il si l'on impose d'acheter **au moins** 1 **flacon de chaque** des 3 acides ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Dénombrement en géométrie (polygones et triangles sur un cercle) : On place 10 **points distincts** sur un cercle (aucun triplet de cordes n'est concourant à l'intérieur du cercle).

1. Combien de **cordes** (segments reliant 2 points) peut-on tracer au total ?
2. Combien de **triangles** différents dont les 3 sommets sont choisis parmi ces 10 points peut-on former ?
3. Combien de **points d'intersection** à l'intérieur du disque ces cordes forment-elles entre elles ? *(Indice : chaque point d'intersection intérieur correspond de manière unique à 4 points sur le cercle formant un quadrilatère convexe dont il est l'intersection des deux diagonales !)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Chemins sur grille avec point de passage interdit ou imposé : Sur une grille rectangulaire, un robot part de $A(0;0)$ pour rejoindre $B(6;4)$ en ne faisant que des pas vers l'Est ($+1$ en x) ou vers le Nord ($+1$ en y), soit 10 pas au total.

1. Expliquer pourquoi le nombre total de chemins de A à B vaut $\binom{10}{4}$ (ou $\binom{10}{6}$) et calculer ce nombre.
2. Combien de ces chemins passent obligatoirement par le point relais $R(3;2)$?
3. En déduire le nombre de chemins qui **évitent** le point $R(3;2)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Cinq ateliers en parallèle proposent respectivement un, deux, trois, quatre et cinq créneaux. On choisit un atelier puis l'un de ses créneaux. Combien de choix ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Combien de suites de trois lettres différentes peut-on former avec A, B, C et D ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Parmi neuf personnes, on forme un duo sans rôles. Combien de duos ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On distribue trois médailles distinctes à trois personnes parmi sept. Combien de distributions ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Combien de codes de quatre bits ont exactement deux 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Combien de chemins minimaux sur une grille demandent deux pas vers l'est et trois vers le nord ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres de MAMAN ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un menu offre quatre entrées et cinq plats. Deux associations précises sont indisponibles. Combien de menus restent possibles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

De combien de manières placer quatre livres différents sur une étagère si deux livres précis doivent rester côte à côte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Parmi les entiers de 1 à 60, combien sont divisibles par 4 ou 6 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un code PIN de carte bancaire comporte 4 chiffres (de 0 à 9).

1. Combien de codes différents existe-t-il ?
2. Combien de codes ont leurs 4 chiffres tous différents ?
3. En déduire le nombre de codes comportant au moins un chiffre répété.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Huit athlètes disputent la finale d'un 100 m.

1. De combien de façons le podium (or, argent, bronze) peut-il être composé ?
2. Combien de groupes de 3 athlètes qualifiés pour la suite (sans ordre) peut-on former ?
3. Expliquer le lien entre les deux résultats.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Dans une classe de 12 élèves, on forme un comité de 5 élèves.

1. Combien de comités différents peut-on former ?
2. Combien de comités comprenant un président désigné (parmi les 5) peut-on former ?
3. Combien de comités contiennent Léa ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

1. Combien d'anagrammes (avec ou sans signification) peut-on former avec les lettres du mot **PHYSIQUE** ?
2. Et avec les lettres du mot **BALLON** ?
3. Et avec **ANANAS** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

On place 10 points sur un cercle.

1. Combien de segments peut-on tracer entre ces points ?
2. Combien de triangles ont leurs sommets parmi ces points ?
3. Combien de quadrilatères ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Au Swiss Lotto, on coche 6 numéros parmi 42 (on ne tient pas compte du numéro chance).

1. Combien de grilles différentes existe-t-il ?
2. Quelle est la probabilité de gagner le gros lot avec une grille ?
3. Combien de grilles ont exactement 5 bons numéros ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Sur une grille, un robot part de $(0;0)$ et va en $(4;3)$ en faisant uniquement des pas d'une unité vers l'Est (E) ou vers le Nord (N).

1. Combien de pas fait-il ? Combien de chemins différents existe-t-il ?
2. Combien de chemins passent par le point $(2;1)$?

3. Combien de chemins évitent ce point ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. De combien de façons 6 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 6 places ?
2. Et autour d'une table ronde (deux dispositions qui se déduisent par rotation sont considérées comme identiques) ?
3. Autour de la table ronde, combien de dispositions placent Ana et Ben côte à côte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une pizzeria propose 8 ingrédients. Une pizza peut contenir n'importe quelle sélection d'ingrédients (y compris aucun).

1. Combien de pizzas différentes peut-on composer ?
2. Combien comportent exactement 3 ingrédients ?
3. Vérifier que $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + ... + \binom{8}{8} = 2^8$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Triangle de Pascal : on a la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

1. Écrire les lignes $n = 0$ à $n = 6$ du triangle de Pascal.
2. Vérifier la relation pour $\binom{6}{3}$.
3. Justifier la relation par un raisonnement : on choisit k élèves parmi n, dont Zoé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Probabilités

Exercice 1

Lancer de deux dés équilibrés à 6 faces : On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu (ou deux fois de suite un dé équilibré) et l'on note la somme S des deux résultats.

1. Combien y a-t-il d'issues ordonnées équiprobables au total ? Dresser le tableau de toutes les sommes possibles et préciser la probabilité d'obtenir $S = 7$ et $S = 10$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme **supérieure ou égale à** 9 ($S \geq 9$) ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un **double** (même chiffre sur les deux dés) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Événement complémentaire ($P(\bar{A}) = 1 - P(A)$) — Le pari du chevalier de Méré :

1. On lance 4 **fois de suite** un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité de n'obtenir **aucun** 6 lors des 4 lancers ? En déduire la probabilité d'obtenir **au moins un** 6.
2. On lance maintenant 24 **fois** une paire de dés équilibrés. La probabilité d'obtenir un double-six sur un lancer vaut $\frac{1}{36}$. Calculer la probabilité d'obtenir **au moins un double-six** en 24 lancers (on donne $(35/36)^{24} \approx 0{,}5086$). Est-ce supérieur ou inférieur à 50% ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Tirages en urne avec remise vs sans remise : Une urne contient 5 **boules rouges** et 3 **boules vertes** (8 boules indiscernables au toucher). On tire successivement 2 **boules**.

1. **Avec remise :** On remet la première boule dans l'urne avant de tirer la seconde. Calculer la probabilité d'obtenir :
   - deux boules rouges (RR) ;
   - deux boules de **couleurs différentes** (RV ou VR).
2. **Sans remise :** On ne remet pas la première boule dans l'urne. Recalculer ces deux mêmes probabilités (à l'aide d'un arbre pondéré).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Tirage simultané (par combinaisons) : Une boîte contient 10 **composants électroniques** dont 3 **sont défectueux** et 7 fonctionnent normalement. Un technicien prélève **simultanément** 3 **composants** au hasard pour les tester.

Calculer la probabilité :

1. que les 3 **composants** prélevés fonctionnent tous ;
2. qu'il y ait **exactement** 1 **composant défectueux** dans le lot prélevé ;
3. qu'il y ait **au moins** 1 **composant défectueux**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Événements incompatibles vs indépendants, et formule $P(A \cup B)$: Dans un lycée, on interroge un élève au hasard :

- la probabilité qu'il pratique un sport en club (S) vaut $P(S) = 0{,}55$;
- la probabilité qu'il joue d'un instrument de musique (M) vaut $P(M) = 0{,}30$;
- la probabilité qu'il fasse **les deux** ($S \cap M$) vaut $P(S \cap M) = 0{,}15$.

1. Calculer la probabilité qu'il pratique **au moins l'une** des deux activités ($P(S \cup M)$).
2. Calculer la probabilité qu'il ne pratique **aucune** des deux activités.
3. Les événements S et M sont-ils **incompatibles** ? Sont-ils **indépendants** (vérifier si $P(S \cap M) = P(S) \times P(M)$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Arbre de probabilités et probabilité totale (contrôle qualité en usine) : Une usine fabrique des résistances électriques sur deux chaînes :

- la **chaîne** A produit 60% des pièces, dont 2% sont défectueuses ;
- la **chaîne** B produit 40% des pièces, dont 5% sont défectueuses.

On prélève une résistance au hasard dans le stock total.

1. Construire l'arbre pondéré des probabilités (A ou B, puis Défectueuse D ou Conforme $\overline{D}$).
2. Calculer la probabilité globale $P(D)$ que la résistance prélevée soit défectueuse.
3. *Probabilité conditionnelle inverse (Bayes) :* La pièce tirée s'avère être défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la **chaîne** B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Espérance mathématique et équité d'un jeu de hasard : Lors d'une kermesse, un joueur mise 3 **CHF** pour lancer un dé équilibré à 6 faces :

- s'il obtient un 6, il gagne 10 CHF (gain net = +7 CHF) ;
- s'il obtient un 4 **ou un** 5, on lui rembourse sa mise de 3 CHF (gain net = 0 CHF) ;
- s'il obtient 1, 2 **ou** 3, il perd sa mise (gain net = −3 CHF).

1. Établir la loi de probabilité du gain net G (en CHF).
2. Calculer l'**espérance mathématique** $E(G)$ de ce jeu. Ce jeu est-il favorable au joueur, équitable, ou favorable à l'organisateur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Deux urnes successives (probabilités composées) : On dispose de deux urnes :

- l'**urne 1** contient 3 boules blanches et 2 boules noires (5 boules) ;
- l'**urne 2** contient 4 boules blanches et 4 boules noires (8 boules).

On tire au hasard une boule de l'urne 1 et on la **glisse dans l'urne 2** (sans la regarder), puis on tire une boule dans l'urne 2.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité que la boule tirée dans l'urne 2 soit **blanche**.
2. Sachant que la boule tirée dans l'urne 2 est **blanche**, quelle est la probabilité que la boule transférée depuis l'urne 1 ait été **blanche** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Le paradoxe des anniversaires (sur un petit groupe) : On suppose qu'une année compte 365 jours équiprobables (en ignorant le 29 février) et que les dates d'anniversaire des élèves d'une classe sont indépendantes.

1. Pour 3 **élèves**, calculer la probabilité exacte qu'ils aient tous les 3 des anniversaires **différents**, puis la probabilité qu'au moins 2 aient le même jour d'anniversaire.
2. On compare avec un groupe de 23 **élèves** : expliquer comment s'écrit le produit donnant la probabilité p_{diff} que les 23 anniversaires soient tous distincts. Sachant que ce produit vaut environ 0,4927, quelle est la probabilité qu'au moins 2 élèves sur 23 partagent le même anniversaire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème combiné (dés truqués / schéma de Bernoulli) : Une pièce de monnaie est légèrement truquée : la probabilité d'obtenir **Pile** vaut $p = 0{,}60$ et celle d'obtenir **Face** vaut $q = 0{,}40$. On lance cette pièce 3 **fois de suite** de manière indépendante.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite exacte `(Pile, Pile, Face)` ?
2. Combien de suites différentes comportent **exactement** 2 **Pile et** 1 **Face** ? En déduire la probabilité d'obtenir **exactement** 2 **Pile** en 3 lancers.
3. Calculer la probabilité d'obtenir **au moins** 1 **Pile** en 3 lancers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un sac contient 6 boules orange et 8 boules violettes. Une boule est tirée au hasard. Quelle est la probabilité de tirer une violette ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un sac contient 6 jetons étoilés et 8 jetons unis. Quelle est la probabilité de tirer deux jetons étoilés lors de deux tirages successifs sans remise ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Une flèche atteint la cible avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ à chaque essai indépendant. Calcule la probabilité de toucher au moins une fois en deux essais.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 sont lancés indépendamment. Quelle est la probabilité qu'ils donnent le même nombre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un casier a 6 lettres possibles et 8 chiffres possibles. Chaque code consiste en une lettre suivie d'un chiffre. Combien existe-t-il de codes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On choisit uniformément un entier de 1 à 48. Quelle est la probabilité qu'il soit divisible par 6 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Lors de 240 lancers, un résultat a été obtenu 42 fois. Donne sa fréquence sous forme de fraction réduite.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Une trousse contient quatre feutres verts et trois noirs. Deux feutres sont choisis uniformément sans remise. Sachant que le premier est noir, quelle est la probabilité que le second soit vert ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un capteur émet un faux signal avec une probabilité de 1/20 par minute, indépendamment d'une minute à l'autre. Quelle est la probabilité de n'en avoir aucun sur trois minutes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On lance deux dés équilibrés à 6 faces.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. Calculer la probabilité que la somme vaille 7.
3. Calculer la probabilité que la somme soit au moins 10.
4. Calculer la probabilité d'obtenir un double.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

On lance trois fois une pièce équilibrée.

1. Écrire toutes les issues (P = pile, F = face).
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux piles.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un pile.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire successivement 2 boules **sans remise**.

1. Calculer la probabilité que les deux boules soient rouges.
2. Calculer la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes.
3. Calculer la probabilité qu'elles soient toutes deux bleues, et vérifier que la somme des trois probabilités vaut 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On tire une carte dans un jeu de jass de 36 cartes (4 couleurs de 9 cartes, dont un as par couleur).

1. Calculer la probabilité de tirer un as.
2. Calculer la probabilité de tirer un cœur.
3. Calculer la probabilité de tirer un as **ou** un cœur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une maladie touche 1 % de la population. Un test de dépistage est positif pour 99 % des malades, mais aussi pour 5 % des personnes saines (faux positifs).

1. Construire un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un test positif.
3. Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ? Commenter.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

À une fête, on paie 2 CHF pour lancer un dé. Si on obtient 6, on gagne 10 CHF ; sinon, on ne gagne rien.

1. Calculer l'espérance du gain net d'un joueur.
2. Le jeu est-il équitable ? Quelle mise rendrait le jeu équitable ?
3. Combien l'organisateur peut-il espérer gagner sur 600 parties ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un joueur de football réussit un penalty avec une probabilité de 0,8. Il en tire 4, de façon indépendante.

1. Calculer la probabilité qu'il les réussisse tous.
2. Calculer la probabilité qu'il en rate au moins un.
3. Calculer la probabilité qu'il en réussisse exactement 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Trois amis naissent chacun un jour de la semaine au hasard (les 7 jours étant équiprobables et indépendants).

1. Calculer la probabilité qu'ils soient nés trois jours différents.
2. En déduire la probabilité qu'au moins deux soient nés le même jour de la semaine.
3. À partir de combien d'amis cette probabilité vaut-elle 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On lance 1 000 fois une pièce et on obtient 520 piles.

1. Quelle est la fréquence d'apparition de pile ?
2. La pièce est-elle truquée ? On admet qu'avec 1 000 lancers, la fréquence d'une pièce équilibrée se trouve presque toujours (95 % des cas) dans l'intervalle $\left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}; 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right]$.
3. Qu'aurait-on conclu avec 10 000 lancers et 5 200 piles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On lance une fléchette au hasard dans une cible carrée de 2 m de côté (la fléchette atteint toujours le carré). Un disque de rayon 1 m est dessiné au centre.

1. Calculer la probabilité que la fléchette tombe dans le disque.
2. Sur 1 000 lancers, 786 tombent dans le disque. En déduire une estimation de π.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Complément de calcul littéral

Exercice 1

Ensemble de définition et simplification de fractions rationnelles : Pour chacune des deux fractions rationnelles suivantes, déterminer l'**ensemble de définition** $\mathcal{D}$ (valeurs interdites exclues), puis simplifier au maximum l'expression :

1. $F(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$
2. $G(x) = \frac{2x^2+6x}{x^2+x-6}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Opérations sur les fractions rationnelles : Après avoir précisé les valeurs interdites, réduire à une seule fraction simplifiée :

1. $A(x) = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x^2-4}$
2. $B(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \div \frac{x-1}{x+2}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Équations rationnelles et tri des valeurs interdites : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes, après avoir déterminé leur ensemble de définition $\mathcal{D}$:

1. $\frac{x+2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$
2. $\frac{2x}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Tableau de signes d'un produit : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante à l'aide d'un tableau de signes :

$$(2x-6)(-x-1)(x+4) \geq 0$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Tableau de signes d'un quotient (inéquation rationnelle) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{2x-1}{x+3} \leq 1$$

(Attention : ne jamais multiplier par $x+3$ sans connaître son signe ! Tout ramener d'un côté pour comparer à 0.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Système de 3 équations à 3 inconnues : Résoudre algébriquement par élimination (méthode de Gauss / combinaisons linéaires) le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 4 & (L_1) \\ 2x - y + 3z = 14 & (L_2) \\ 3x + 2y - z = 1 & (L_3) \end{cases}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Application d'un système 3×3 (déterminer une trajectoire parabolique) : Lors d'une expérience de physique, un projectile passe par trois points mesurés : $A(-1;10)$, $B(1;4)$ et $C(2;7)$.

On cherche l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par ces trois points.

1. Traduire l'appartenance de A, B, C à la courbe en un système de 3 équations aux inconnues (a, b, c).
2. Résoudre ce système pour trouver l'équation exacte de la trajectoire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Système cyclique de pesées (trois fioles) : Un chimiste pèse deux par deux trois flacons A, B, C de masses respectives x, y, z (en grammes) :

- A et B ensemble pèsent 110 **g** ;
- B et C ensemble pèsent 150 **g** ;
- A et C ensemble pèsent 140 **g**.

1. Écrire le système de 3 équations à 3 inconnues correspondant.

2. En additionnant les 3 équations membre à membre, trouver astucieusement la masse totale $x+y+z$, puis en déduire la masse de chaque flacon.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Factorisations avancées et identités cubiques :

1. Développer et simplifier $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour démontrer l'identité remarquable de la **différence de deux cubes** a^3-b^3.
2. Utiliser cette identité pour simplifier la fraction rationnelle :

$$H(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4} \qquad (\text{préciser } \mathcal{D}_H)$$

3. Factoriser complètement $P(x)=x^4-16$ en un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Isolation d'une variable dans des formules de physique : Dans chaque formule ci-dessous (où toutes les grandeurs sont supposées positives), exprimer l'inconnue demandée en fonction des autres :

1. Formule de l'énergie cinétique $E_c=\frac{1}{2}mv^2$: exprimer la vitesse v en fonction de E_c et m.
2. Formule des résistances en parallèle $\frac{1}{R_{\text{éq}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$: exprimer R_2 en une seule fraction en fonction de $R_{\text{éq}}$ et R_1.
3. Période d'un pendule simple $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$: exprimer la longueur ℓ du fil en fonction de T et g.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Simplifie $(x^2-49)/(x-7)$ et donne la valeur interdite.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Simplifie $6x^2/(9x)$ sur son domaine.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Réduis $1/x+1/(x+1)$ à une seule fraction.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Simplifie $(x^2+6x+9)/(x+3)^2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Quelle valeur annule la fraction $(x-5)/(x+2)$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Donne le domaine réel de $1/(x^2 - 16)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Réduis $2/(x-1) - 1/(x+1)$ à une seule fraction.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Simplifie $x(x-2)/((x-2)(x+4))$ en donnant le domaine.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Pour quelles valeurs a-t-on $x/x = 1$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Résous $(x+2)/(x-1) = 3$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Développer et réduire à l'aide des identités remarquables :

1. $(2x-3)^2$
2. $(x+5)(x-5)$
3. $(3a+2b)^2$
4. $(x-2)^3$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Factoriser :

1. $9x^2 - 16$
2. $x^2 + 10x + 25$
3. $4x^2 - 12x + 9$
4. $(x+1)^2 - 9$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Simplifier la fraction rationnelle suivante en précisant les valeurs interdites :

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Écrire sous forme d'une seule fraction :

$$S(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Résoudre l'équation :

$$\frac{3}{x-2} = \frac{1}{x+4}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

1. $3(x-2) < 5x + 4$
2. $\frac{x}{2} - 1 \geq \frac{x+3}{3}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Résoudre l'inéquation $(x-1)(x+3) \leq 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Isoler la variable demandée dans chaque formule de physique (toutes les grandeurs sont positives) :

1. $E = \frac{1}{2}mv^2$: isoler v.
2. $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$: isoler p'.
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$: isoler ℓ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Au cinéma, 2 billets adultes et 3 billets enfants coûtent 57 CHF ; 1 billet adulte et 4 billets enfants coûtent 51 CHF.

1. Écrire un système d'équations.
2. Le résoudre par substitution.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

1. Développer $(a+b)^3$.
2. En déduire de tête 11^3 et 101^3.
3. Vérifier l'identité $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ en développant le membre de droite, puis factoriser $x^3 - 8$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Accent sur le premier degré

Exercice 1

Équation réduite d'une droite ($y = mx + h$) : Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2; 7)$ et $B(4; -5)$.

1. Calculer la pente m et l'ordonnée à l'origine h de la droite (AB).
2. Le point $C(10; -17)$ appartient-il à la droite (AB) ?
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les deux axes du repère.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Parallélisme et perpendicularité : On donne la droite d_1 d'équation cartésienne $3x - 2y + 8 = 0$.

1. Mettre l'équation de d_1 sous forme réduite $y = mx + h$ pour lire sa pente m_1.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite d_2 **parallèle** à d_1 passant par le point $P(4; 1)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite d_3 **perpendiculaire** à d_1 passant par le point $Q(3; -1)$ *(rappel : deux droites non verticales de pentes m_1 et m_3 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \cdot m_3 = -1$).*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Médiatrice d'un segment : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1; 2)$ et $B(5; 6)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$ et la pente de la droite (AB).
2. En déduire l'équation réduite de la **médiatrice** Δ du segment $[AB]$ (droite perpendiculaire à (AB) passant par M).
3. Vérifier que le point $K(4; 1)$ appartient à Δ, et confirmer par le calcul de KA et KB qu'il est bien équidistant de A et de B.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Hauteurs et orthocentre d'un triangle : Dans un repère orthonormé, on considère le triangle ABC de sommets $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer l'équation de la hauteur h_C issue de C (perpendiculaire à (AB)).
2. Déterminer l'équation réduite de la hauteur h_A issue de A (perpendiculaire à (BC)).
3. En déduire les coordonnées de l'**orthocentre** H du triangle ABC, et vérifier que la troisième hauteur h_B issue de B passe bien par H.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Médianes et centre de gravité : On considère le triangle ABC de sommets $A(0; 0)$, $B(9; 0)$ et $C(3; 6)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu M_A de $[BC]$ et du milieu M_C de $[AB]$.
2. Déterminer les équations des deux médianes (AM_A) et (CM_C), puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection : le **centre de gravité** G.
3. Vérifier que les coordonnées de G correspondent bien à la moyenne des sommets $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Distance d'un point à une droite (deux méthodes) : Dans un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $3x + 4y - 12 = 0$ et le point extérieur $P(7; 4)$.

1. **Méthode géométrique (projeté orthogonal H) :**
   - Écrire l'équation réduite de d, puis déterminer l'équation de la droite Δ perpendiculaire à d passant par P.
   - Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H (intersection de d et Δ), puis la distance PH.
2. **Vérification par la formule directe :** Retrouver le même résultat en appliquant la formule de la distance d'un point $P(x_0; y_0)$ à la droite $ax + by + c = 0$:

$$d(P; d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Famille de droites avec paramètre : Pour tout réel m, on considère la droite d_m d'équation :

$$y = mx + 2m - 3$$

1. Montrer que toutes les droites d_m (quel que soit m) passent par un **unique point fixe** I, dont on calculera les coordonnées *(indice : factoriser par m).*
2. Pour quelle valeur de m la droite d_m passe-t-elle par le point $A(4; 9)$?
3. Pour quelle valeur de m la droite d_m est-elle parallèle à la droite $d' : 2x + y - 5 = 0$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Distance entre deux droites parallèles : On considère les deux droites :

- $d_1 : 3x - 4y + 5 = 0$
- $d_2 : 6x - 8y - 30 = 0$

1. Montrer que d_1 et d_2 sont parallèles.
2. Trouver les coordonnées d'un point A à coordonnées entières appartenant à d_1 (par exemple d'abscisse $x = 1$).
3. Calculer la **distance exacte** qui sépare les deux droites parallèles d_1 et d_2.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Équations et inéquations avec valeur absolue (premier degré) :

1. Résoudre graphiquement ou algébriquement : $|2x - 5| = 7$.
2. Résoudre l'inéquation $|3x + 6| < 9$ et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.
3. Une machine usine des tiges de longueur idéale 50,0 mm avec une tolérance maximale de $\pm$0,4 mm. Traduire cette contrainte par une inéquation avec valeur absolue sur la longueur mesurée L.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

La droite d'Euler d'un triangle : On reprend le triangle ABC de sommets $A(0; 0)$, $B(9; 0)$ et $C(3; 6)$, dont on connaît déjà le centre de gravité $G(4; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du **centre du cercle circonscrit** Ω (intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$).
2. Calculer les coordonnées de l'**orthocentre** H (intersection de la hauteur issue de C et de la hauteur issue de A).
3. Vérifier que les trois points remarquables Ω**,** G **et** H **sont alignés** sur une même droite (la *droite d'Euler*, d'équation à déterminer), et vérifier la relation vectorielle $\overrightarrow{GH} = -2\,\overrightarrow{G\Omega}$ (soit $GH = 2\,G\Omega$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Donne la pente de la droite passant par (2, 3) et (6, 15).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Quelle est l'équation réduite de $6x + 3y = 12$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Donne une équation de la droite de pente -4 passant par (2, 7).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Quel est le point d'intersection de $y = 3x - 2$ et $y = -x + 10$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Les droites $y = 2x + 3$ et $4x - 2y = 8$ sont-elles parallèles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Donne la pente d'une droite perpendiculaire à $y = 5x - 1$ dans un repère orthonormé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Quelle équation décrit la droite verticale passant par $(4, -7)$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Sur la droite $2x + 5y = 20$, trouve la distance en unités entre l'origine et son intersection avec l'axe des abscisses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Le point $(-3, 9)$ appartient-il à $2x + y = 2$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Résous l'inéquation $-3x + 2 \leq 14$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1;2)$ et $B(5;10)$.

1. Calculer la pente de la droite (AB).
2. Déterminer son équation réduite.
3. Le point $C(-2;-4)$ appartient-il à (AB) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Déterminer le point d'intersection des droites $d_1 : 2x + y = 7$ et $d_2 : x - 3y = -7$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

On donne la droite $d : y = -2x + 1$ et le point $P(4;1)$.

1. Déterminer l'équation de la droite p perpendiculaire à d passant par P.
2. Calculer les coordonnées du point H, pied de la perpendiculaire.
3. En déduire la distance de P à la droite d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On donne $A(-2;3)$ et $B(4;-5)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$.
2. Calculer la longueur AB.
3. Déterminer l'équation de la médiatrice de $[AB]$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

On considère le triangle $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(2;5)$.

1. Calculer son aire.
2. Calculer les longueurs des trois côtés (valeurs exactes).
3. Le triangle est-il rectangle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une voiture part de Lausanne vers Berne (100 km) à 60 km/h à 8 h. Au même moment, une autre part de Berne vers Lausanne à 40 km/h. On note t le temps en heures et x la distance à Lausanne en km.

1. Écrire les équations $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux mouvements.
2. À quelle heure et à quelle distance de Lausanne se croisent-elles ?
3. Interpréter graphiquement.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On considère la droite $d : 3x - 4y + 12 = 0$.

1. Écrire son équation réduite. Donner sa pente et son ordonnée à l'origine.
2. Calculer les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes.
3. Calculer l'aire du triangle formé par d et les deux axes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Les points $A(1;1)$, $B(3;5)$ et $C(6;11)$ sont-ils alignés ? Et A, B et $D(7;12)$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

La distance d'un point $P(x_0;y_0)$ à la droite $ax+by+c=0$ vaut $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1. Calculer la distance de $P(5;5)$ à la droite $d : 3x+4y-10=0$.
2. Calculer la distance de l'origine à d.
3. Le cercle de centre P et de rayon 5 est-il tangent à d ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On considère le système d'inéquations :

$$\begin{cases} y \geq 2x-1 \\ y \leq -x+5 \end{cases}$$

1. Calculer le point d'intersection des deux droites frontières.
2. L'origine vérifie-t-elle le système ? Le point $(3;4)$?
3. Décrire la région des solutions.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Accent sur le second degré

Exercice 1

Discriminant Δ et nombre de racines : On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), de discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

Calculer Δ et résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des trois équations suivantes :

1. $2x^2-5x-3=0$
2. $4x^2-12x+9=0$
3. $x^2+3x+5=0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Étude complète d'une parabole (forme canonique, sommet, axe) : Soit la fonction quadratique $f(x) = -2x^2+8x+10$.

1. Écrire $f(x)$ sous **forme canonique** $a(x-\alpha)^2+\beta$, et en déduire les coordonnées du **sommet** S, l'équation de l'**axe de symétrie** et l'orientation (concavité) de la parabole.
2. Déterminer les points d'intersection de la parabole avec l'axe Ox ($f(x)=0$) et l'axe Oy ($f(0)$).
3. En déduire le tableau de variation de f et les solutions de l'inéquation $f(x)>0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Équation quadratique avec paramètre m : On considère l'équation d'inconnue x et de paramètre réel m :

$$x^2-2mx+(m+2)=0$$

1. Calculer le discriminant Δ en fonction de m, puis le factoriser.
2. Discuter, selon les valeurs de m, le **nombre de solutions réelles** de cette équation (à l'aide d'un tableau de signes de $\Delta(m)$).

3. Donner la solution lorsque $m = 2$ et lorsque $m = -1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Relations de Viète (somme et produit des racines) : Pour toute équation $ax^2 + bx + c = 0$ admettant deux racines x_1 et x_2, on rappelle les relations de Viète :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

1. Sans calculer les racines de $3x^2 - 12x + 5 = 0$ (vérifier d'abord que $\Delta > 0$), calculer directement :
   - $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$;
   - $x_1^2 + x_2^2$;
   - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
2. Trouver deux nombres dont la somme vaut 13 et le produit vaut 36 en écrivant l'équation du second degré associée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Tangente à une parabole passant par une pente donnée (critère $\Delta = 0$) : On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 3x + 4$.

1. On cherche la droite d de **pente** $m = 1$ (donc d'équation $y = x + h$) qui est **tangente** à la parabole $\mathcal{P}$. En écrivant l'équation aux abscisses d'intersection $x^2 - 3x + 4 = x + h$, quelle condition sur le discriminant Δ traduit la tangence (un unique point de contact double) ?
2. Calculer h, en déduire l'équation de la tangente et les coordonnées exactes du **point de tangence** T.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Tangentes à une parabole issues d'un point extérieur : On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et le point extérieur $A(1; -3)$ (situé sous la parabole).

1. Écrire l'équation générale d'une droite non verticale passant par $A(1; -3)$ et de pente m : $y = m(x - 1) - 3$.
2. En écrivant que cette droite est tangente à $y = x^2$ ($\Delta = 0$), montrer que les pentes m des deux tangentes possibles vérifient l'équation $m^2 - 4m - 12 = 0$.
3. En déduire les équations des **deux tangentes** à $\mathcal{P}$ passant par $A(1; -3)$ et leurs deux points de tangence.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Problème physique du second degré (trajectoire parabolique et obstacle) : Un ballon est tiré depuis le sol ($x = 0, y = 0$) et suit la trajectoire parabolique :

$$y(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}8x$$

où x est la distance horizontale et y la hauteur (en mètres).

1. À quelle distance retombe-t-il au sol ($y = 0$), et quelle hauteur maximale atteint-il ?
2. Un mur de hauteur 2,5 m est situé à $x = 5$ m du point de tir. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?
3. Sur quel intervalle de distances x le ballon se trouve-t-il à une hauteur d'au moins 3,0 m ($y(x) \geq 3{,}0$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Équations bicarrées (changement de variable $X = x^2$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes en posant $X = x^2$ (avec $X \geq 0$) :

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
2. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Modélisation par une équation du second degré (débits en parallèle) : Deux pompes A et B fonctionnant ensemble remplissent un bassin en 6 **heures**.

Si la pompe A fonctionne seule, elle met t heures pour remplir le bassin ; la pompe B seule est plus lente et met 5 **heures de plus** que A (soit $t + 5$ heures).

1. Sachant que les débits s'additionnent ($\frac{1}{t} + \frac{1}{t+5} = \frac{1}{6}$), montrer que t vérifie l'équation $t^2 - 7t - 30 = 0$.
2. Résoudre cette équation et en déduire la durée de remplissage de chaque pompe prise séparément.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (paramètre, Δ et relations de Viète) : On considère l'équation du second degré :

$$(E_m) : x^2 - (m+1)x + (m-2) = 0$$

1. Montrer que le discriminant $\Delta = (m-1)^2 + 8$, et en déduire que l'équation (E_m) admet **toujours deux racines réelles distinctes x_1 et x_2**, quel que soit $m \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 x_2$ en fonction de m.
3. Pour quelles valeurs de m les deux racines x_1 et x_2 sont-elles **toutes les deux strictement positives** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Calcule le discriminant de $2x^2 - 5x + 2 = 0$, puis ses racines.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Résous $3x^2 + 12x + 12 = 0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une équation du second degré a un discriminant négatif. Combien a-t-elle de solutions réelles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Écris $x^2 + 8x + 11$ en forme canonique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Quel est le sommet de $f(x) = -3(x-2)^2 + 7$ et donne-t-il un maximum ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Trouve les zéros de $f(x) = x^2 - 16$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Une parabole a pour racines -2 et 6. Quelle est l'abscisse de son axe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un projectile suit $h(t) = -5t^2 + 15t$ pour t ≥ 0, jusqu'à son retour au sol. Quand retombe-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Trouve les valeurs de x telles que $(x - 4)(x + 1) > 0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trouve une équation quadratique de coefficient dominant 1 avec racines 3 et -5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Résoudre à l'aide du discriminant :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^2 + 3x - 5 = 0$
3. $x^2 + 4x + 7 = 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$.
2. En déduire le sommet de la parabole et la valeur minimale de f.
3. Résoudre $f(x) = 0$ (valeurs exactes).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un rectangle a un périmètre de 40 m et une aire de 96 m^2.

1. En notant x sa longueur, exprimer sa largeur, puis écrire une équation.
2. Résoudre et donner les dimensions.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une balle est lancée vers le haut depuis une hauteur de 1,5 m. Sa hauteur (en m) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$.

1. Quand la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

2. Quand retombe-t-elle au sol (au centième de seconde) ?
3. Pendant combien de temps est-elle au-dessus de 16,5 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Relations de Viète : si x_1 et x_2 sont les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$.

1. Trouver de tête les solutions de $x^2 - 7x + 10 = 0$.
2. Trouver deux nombres dont la somme vaut 17 et le produit 72.
3. L'une des solutions de $x^2 + bx - 12 = 0$ est 3. Trouver l'autre et b.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $x^2 + mx + 9 = 0$:

1. admet-elle une seule solution (double) ? Préciser la solution.
2. admet-elle deux solutions distinctes ?
3. n'admet-elle aucune solution ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Résoudre les inéquations :

1. $x^2 - x - 6 < 0$
2. $-x^2 + 4x \geq 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Déterminer les points d'intersection de la parabole $y = x^2$ et de la droite $y = x + 2$. Faire une esquisse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Résoudre l'équation $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ en posant $X = x^2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un cycliste parcourt 60 km. S'il roulait 5 km/h plus vite, il mettrait 36 minutes de moins.

Calculer sa vitesse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Constructions de lieux

Exercice 1

Lieux géométriques élémentaires (droites et cercles) : Sur une carte à l'échelle (1 cm = 1 km), un trésor T doit satisfaire simultanément deux contraintes :

- il est **équidistant** de deux arbres A et B distants de 8 cm ;
- il se trouve exactement à 5 **cm** d'un puits P (où P est situé à 3 cm de la médiatrice de $[AB]$).

1. Quel est le lieu géométrique des points vérifiant la première contrainte ? La deuxième contrainte ?

2. Décrire la construction à la règle et au compas permettant de trouver tous les emplacements possibles du trésor T, et calculer la distance séparant ces emplacements.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Cercle de Thalès et tangentes à un cercle depuis un point extérieur : On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 3$ cm, et un point extérieur P situé à la distance $OP = 6$ cm.

1. Une tangente à $\mathcal{C}$ passant par P touche le cercle en un point T tel que $(OT) \perp (PT)$ (angle droit $\widehat{OTP} = 90°$). Quel est donc le **lieu géométrique** des points T voyant le segment $[OP]$ sous un angle droit ?
2. Décrire le protocole précis à la règle et au compas pour construire les 2 **tangentes** à $\mathcal{C}$ issues de P.
3. Calculer la longueur exacte des segments tangents PT_1 et PT_2, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{T_1PT_2}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Construction d'un arc capable ($\alpha = 60°$) : Sur une carte maritime, deux phares A et B sont séparés de $AB = 6$ cm. Un navire M relève au sextant l'angle $\widehat{AMB} = 60°$ (du même côté de la droite (AB)).

1. Quel est le **lieu géométrique** des positions M situées dans un demi-plan fixé d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle constant $\alpha = 60°$?
2. Pour construire le centre O de cet **arc capable** à la règle et au compas (méthode de la tangente) :
   - Tracer en A la demi-droite $[AT)$ faisant un angle de $60°$ avec $[AB]$ (dans le demi-plan *opposé* à l'arc).
   - Tracer en A la perpendiculaire à (AT).
   - Expliquer pourquoi son intersection O avec la médiatrice de $[AB]$ est le centre du cercle, et quel est l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
3. Calculer le rayon $R = OA$ de cet arc capable.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Construction d'un arc capable obtus ($\alpha = 135°$) : On donne un segment $[AB]$ de longueur 8 cm.

1. Où se situe le centre O de l'arc capable de $135°$ par rapport à la droite (AB) (du même côté que les points M, ou du côté opposé) ? *(Indice : comparer le petit arc et le grand arc.)*
2. Calculer l'angle $\widehat{OAB}$ et la distance du centre O au milieu H de $[AB]$, puis le rayon $R = OA$ de cet arc capable.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Coniques — Construction d'une ellipse (méthode du jardinier et au compas) : Une **ellipse** de foyers F_1 et F_2 est le lieu géométrique des points M du plan tels que la somme des distances aux deux foyers est constante :

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

On fixe $F_1F_2 = 2c = 6$ cm et la longueur totale de corde $2a = 10$ cm.

1. Expliquer comment construire point par point cette ellipse au **compas** (sans ficelle !) en découpant la longueur 10 cm en deux rayons r_1 et $r_2 = 10 - r_1$. Donner 3 paires $(r_1; r_2)$ valides et expliquer pour quelles valeurs limites de r_1 les deux cercles ne se coupent plus.
2. Calculer le demi-grand axe a et le demi-petit axe $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ de cette ellipse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Coniques — Parabole et hyperbole :

1. **Parabole :** On donne un point fixe F (le *foyer*) et une droite horizontale d (la *directrice*) situés à 4 cm l'un de l'autre. La parabole est le lieu des points M équidistants de F et de d ($MF = \text{dist}(M; d)$).
   - Comment construire au compas et à l'équerre les points de la parabole situés à une distance $y = 3$ cm au-dessus de d ?
   - Quelles sont les coordonnées du **sommet** S de la parabole (en plaçant d sur $y = 0$ et F en $(0; 4)$) ?
2. **Hyperbole :** Une hyperbole de foyers F_1 et F_2 ($F_1F_2 = 10$ cm) est le lieu des points M tels que $|MF_1 - MF_2| = 6$ cm. Donner 3 couples de rayons $(r_1; r_2)$ à utiliser au compas pour construire des points de la branche droite (où $MF_1 - MF_2 = +6$ cm).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

L'échelle qui glisse contre un mur (lieu d'un point fixe sur l'échelle) : Une échelle rectiligne $[AB]$ de longueur fixe $L = 4{,}0$ m est appuyée contre un mur vertical (Oy) et repose sur un sol horizontal (Ox). Elle glisse lentement en gardant le sommet A collé au mur et le pied B collé au sol.

1. Quel est le **lieu géométrique** décrit par le **milieu** M de l'échelle pendant toute sa chute ? *(Indice : penser à la propriété de la médiane issue de l'angle droit dans le triangle rectangle OAB.)*
2. Quelle est la longueur totale de la trajectoire parcourue par le point M entre la position verticale ($B = O$) et la position à plat au sol ($A = O$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Spirale d'Archimède et développante de carré :

1. **Spirale d'Archimède :** Un point M tourne autour d'un pôle O à vitesse angulaire constante tout en s'éloignant de O à vitesse radiale constante, de sorte que son rayon polaire vaut $r(\theta) = 1 \text{ cm} \times \frac{\theta}{90^\circ}$ (il s'éloigne de 1 cm tous les 90°). Calculer les rayons r pour $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ, 720^\circ$, et préciser l'espacement entre deux spires successives.
2. **Développante d'un carré (enroulement d'une ficelle) :** Une ficelle de longueur $L = 8$ cm est attachée au sommet A d'un carré fixe $ABCD$ de côté 2 cm, et tendue le long de $[DA]$ (vers l'extérieur au-delà de A). On enroule la ficelle tendue autour du carré dans le sens $A \to B \to C \to D$. Décrire les 4 **arcs de cercle** successifs tracés par le bout de la ficelle (centres et rayons) et calculer la longueur totale de cette spirale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

La cycloïde (trajectoire d'une valve de vélo) : Une roue circulaire de rayon $R = 30$ cm roule sans glisser sur une route horizontale rectiligne. On suit la trajectoire d'un point M fixé sur le pneu (initialement au contact du sol en $O(0; 0)$).

1. Sur une distance au sol d'un tour complet de roue, quelle est la **longueur de la base d'une arche** de cycloïde ?
2. Quelle est l'**altitude maximale** atteinte par M (et pour quelle distance parcourue par le centre de la roue) ?
3. Comment construire géométriquement la position de M après un **quart de tour** (90°) de la roue ? Calculer les coordonnées exactes de M à cet instant.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse — Le cercle d'Apollonius : Dans un plan, on donne deux points fixes $A(-3; 0)$ et $B(3; 0)$ ($AB = 6$). On cherche le lieu géométrique des points $M(x; y)$ tels que le rapport des distances soit constant

et égal à 2 :

$$\frac{MA}{MB} = 2 \quad (\text{soit } MA = 2\,MB)$$

1. Trouver les **deux points** I **et** J de la droite (AB) (axe Ox) qui vérifient $MA = 2\,MB$ (l'un entre A et B, l'autre à droite de B).
2. En écrivant $MA^2 = 4\,MB^2$ en coordonnées $(x; y)$, démontrer que le lieu des points M est exactement le **cercle de diamètre** $[IJ]$ (appelé *cercle d'Apollonius*) ! Préciser son centre et son rayon.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Construis tous les points à 4 cm d'un point O donné.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Construis tous les points équidistants de deux points distincts A et B.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Construis les points situés à 3 cm d'une droite d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On donne un cercle de centre O et un point A extérieur. Sur quel cercle auxiliaire trouve-t-on les points de tangence depuis A ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Dans un angle, construis les points intérieurs à égale distance de ses côtés.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

A et B sont distants de 10 cm. Où construire P à 6 cm de A et à 4 cm de B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Construis le lieu des points qui voient le segment AB sous un angle droit.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Deux points A et B sont à 12 cm. Peut-on construire P à 3 cm de A et 7 cm de B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Construis le lieu des points dont la projection orthogonale sur d est un point fixé M de d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Construis un cercle de rayon 2 cm tangent à une droite d en un point T donné.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On donne les points $A(0;0)$, $B(8;0)$ et $C(0;6)$.

1. Expliquer comment construire le cercle passant par A, B et C.
2. Déterminer son centre et son rayon par le calcul.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

On considère le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 5, et le point $A(3;4)$ de ce cercle.

1. Vérifier que A est sur le cercle.
2. Comment construire la tangente au cercle en A ?
3. Déterminer son équation.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

D'un point P situé à 13 cm du centre d'un cercle de rayon 5 cm, on trace les deux tangentes au cercle.

1. Expliquer comment construire ces tangentes avec le cercle de Thalès.
2. Calculer la longueur de chaque segment de tangente (de P au point de contact).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux droites parallèles d_1 et d_2 sont distantes de 6 cm.

1. Quel est le rayon d'un cercle tangent à d_1 et à d_2 ?
2. Quel est le lieu des centres de ces cercles ?
3. On ajoute un point P situé entre les droites, à 1 cm de d_1. Combien de cercles tangents aux deux droites passent par P ? Comment les construire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un segment $[AB]$ mesure 10 cm.

1. Quel est le lieu des points P tels que $\widehat{APB} = 90^\circ$?
2. Quels points de ce lieu sont à 6 cm de A ? À quelle distance de B sont-ils ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un triangle est rectangle, de côtés 6, 8 et 10 cm.

1. Comment construit-on le cercle inscrit ?
2. Montrer que son rayon vaut $r = \frac{a+b-c}{2}$ pour un triangle rectangle (côtés de l'angle droit a, b ; hypoténuse c), puis le calculer.
3. Vérifier avec la formule $\mathcal{A} = r \times \frac{\text{périmètre}}{2}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On construit une ellipse avec la « méthode du jardinier » : une ficelle de 10 cm est fixée en deux points F_1 et F_2 distants de 8 cm ; on trace la courbe en gardant la ficelle tendue avec un crayon.

1. Quelle propriété ont les points M de l'ellipse ?
2. Calculer la longueur du grand axe et du petit axe.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

On cherche le lieu des points $M(x;y)$ équidistants du point $F(0;1)$ et de la droite $d : y = -1$.

1. Exprimer MF^2 et le carré de la distance de M à d.
2. En déduire l'équation du lieu. De quelle courbe s'agit-il ?
3. Vérifier avec le point $(2;1)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On donne un segment $[AB]$ de 6 cm.

1. Décrire le lieu des points situés à exactement 2 cm du segment $[AB]$ (distance au point le plus proche du segment).
2. Calculer la longueur totale de ce lieu.
3. Calculer l'aire de la région des points à au plus 2 cm du segment.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On donne une droite d et un point P situé à 3 cm de d. On cherche les cercles de rayon r tangents à d et passant par P.

1. Sur quels lieux se trouvent leurs centres ?
2. Combien y a-t-il de solutions si $r = 1$ cm ? $r = 1{,}5$ cm ? $r = 4$ cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Étude de lieux

Exercice 1

Méthode formelle en 3 étapes — Lieu du sommet d'un triangle d'aire constante : On donne un segment fixe $[AB]$ de longueur 6 cm. On considère tous les points M du plan tels que le triangle ABM ait une **aire constante égale à** 12 **cm**^{2}.

Mener l'étude complète du lieu géométrique de M selon la démarche en trois étapes :

1. **Expérimentation et conjecture :** Calculer la hauteur h du triangle issue de M, placer plusieurs points particuliers et formuler une conjecture sur le lieu.
2. **Limites et cas exclus :** Vérifier s'il existe des points interdits ou des frontières.
3. **Démonstration en deux temps (nécessité et suffisance) :** Prouver la double inclusion.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Lieu des milieux des cordes passant par un point fixe : On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 5$ cm, ainsi qu'un point intérieur fixe A tel que $OA = 3$ cm.

Une droite variable d pivote autour de A et coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. On étudie le **lieu géométrique du milieu** M **de la corde** $[PQ]$.

1. **Expérimentation :** Placer M pour la corde portée par (OA), pour la corde perpendiculaire à (OA) en A, et pour une corde oblique.
2. **Conjecture et cas limites :** Quel lieu géométrique décrit le point M ? Y a-t-il des points à exclure ?
3. **Démonstration (nécessité et suffisance) :** Démontrer rigoureusement le lieu trouvé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Lieu des milieux des segments issus d'un point vers un cercle (homothétie) : On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 6$ cm, ainsi qu'un point fixe A extérieur au cercle tel que $OA = 10$ cm.

Un point P parcourt tout le cercle $\mathcal{C}$, et l'on note M **le milieu du segment** $[AP]$.

1. **Expérimentation :** Placer M lorsque P est aux deux intersections de $\mathcal{C}$ avec la droite (OA), et lorsque $(OP) \perp (OA)$.
2. **Conjecture et démonstration :** Quelle transformation géométrique transforme P en M ? En déduire le lieu exact de M (centre et rayon) et rédiger la nécessité et la suffisance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Étude de lieu avec cas exclus et restriction : On donne un segment fixe $[AB]$ de longueur 10 cm. On cherche le lieu des points M du plan tels que le triangle ABM soit **rectangle en** M et que la hauteur issue de M soit **strictement supérieure à** 2,5 **cm**.

1. Dans un premier temps sans la condition sur la hauteur, quel est le lieu des points M tels que ABM soit rectangle en M ? Quels **points limites** doivent être exclus ?
2. En ajoutant la condition $h > 2{,}5$ cm (distance de M à (AB) strictement supérieure à 2,5 cm), décrire exactement le lieu final (rayons, arcs ouverts, angles au centre exacts), puis rédiger la nécessité et la suffisance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Lieu des points équidistants d'un point et d'une droite / ou de deux droites sécantes (bissectrices) : On donne deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point O et formant un angle de 60°.

On cherche le lieu géométrique des centres M des cercles qui sont **simultanément tangents aux deux droites** d_1 **et** d_2.

1. **Expérimentation et cas exclu :** Pour qu'un cercle de centre M soit tangent à d_1 et à d_2, quelle relation doivent vérifier les distances de M à d_1 et à d_2 ? Le point d'intersection O appartient-il au lieu ?
2. **Conjecture et démonstration (nécessité et suffisance) :** Décrire précisément le lieu cherché.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Lieu du centre de gravité G **d'un triangle dont un sommet parcourt un cercle :** Soit un segment fixe $[AB]$ de longueur 6 cm, et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 6$ cm (ne passant pas par A ni B? Choisissons des coordonnées simples : $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $O(0;6)$, $R = 3$ cm).

Un point M parcourt tout le cercle $\mathcal{C}(O; 3\text{ cm})$. On note G **le centre de gravité** du triangle ABM.

1. **Expérimentation et limites :** Que se passe-t-il si M est aligné avec A et B ? Ici, le cercle $\mathcal{C}$ coupe-t-il la droite (AB) ?
2. **Conjecture et démonstration :** En utilisant la propriété du centre de gravité $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ (où I est le milieu fixe de $[AB]$), déterminer exactement le lieu géométrique de G (centre et rayon) et prouver la nécessité et la suffisance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Lieu des centres des cercles passant par un point fixe et tangents à une droite : Soient une droite horizontale fixe d ($y = 0$) et un point fixe $F(0; 4)$ situé à 4 cm au-dessus de d.

On cherche le lieu géométrique des centres $M(x; y)$ des cercles qui **passent par** F et qui sont **tangents à la droite** d.

1. Traduire ces deux conditions en une égalité de distances concernant M. Peut-on avoir $y \leq 0$?
2. En exprimant $MF^2 = d(M; d)^2$ dans le repère orthonormé, démontrer que l'équation du lieu est $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ (**parabole**), puis justifier la suffisance (réciproque).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Lieu d'un point dans un rectangle (somme des carrés des distances) : Soit $ABCD$ un rectangle de dimensions $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm, de centre O (intersection des diagonales).

On cherche le lieu des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 164 \text{ cm}^2$$

1. Placer le repère orthonormé centré en $O(0; 0)$: quelles sont les coordonnées des 4 sommets A, B, C, D ?
2. Calculer $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ en fonction de x et y pour un point $M(x; y)$, et montrer que l'expression se réduit à $4(x^2 + y^2) + 100$.
3. En déduire le lieu exact de M (centre et rayon), et vérifier si les sommets A, B, C, D appartiennent à ce lieu (pour quelle constante k à la place de 164 passeraient-ils par le cercle ?).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Lieu d'intersection de deux droites mobiles (lieu de l'orthocentre) : Dans un repère orthonormé, on donne deux points fixes $A(-4; 0)$ et $B(4; 0)$ sur l'axe horizontal. Un point mobile $M(0; t)$ (avec $t \in \mathbb{R}^*$) parcourt l'axe vertical (privé de l'origine O).

On étudie le lieu de l'**orthocentre** H du triangle ABM lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$.

1. Quelle est l'équation de la hauteur issue de M (perpendiculaire à (AB)) ? En déduire l'abscisse x_H de H.
2. Exprimer la pente de (BM) en fonction de t, puis l'équation de la hauteur issue de A (perpendiculaire à (BM)).
3. En déduire l'ordonnée y_H en fonction de t, puis conclure quel est le **lieu géométrique exact** décrit par H (sans oublier les cas exclus !).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Étude de lieu par géométrie pure — Lieu d'un point divisant une corde variable (arc capable) : Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 4$ cm, et un point fixe A sur ce cercle. Une corde $[AP]$ varie lorsque P parcourt $\mathcal{C} \setminus \{A\}$. Sur le segment $[AP]$, on place le point M tel que $AM = \frac{1}{3}AP$.

1. **Expérimentation :** Où se trouve M quand P est diamétralement opposé à A (point B) ? Que vaut l'angle $\widehat{AMB}$ pour un point P quelconque ?
2. **Conjecture et cas limite :** Identifier le lieu probable de M (centre, rayon, point exclu).
3. **Démonstration (nécessité et suffisance) :** Prouver rigoureusement que le lieu est exactement le cercle trouvé privé de A.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Quel est le lieu des points à distance au plus 5 cm de O ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Quel est le lieu des points plus proches de A que de B, pour des points distincts A et B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Sur x = 0, combien de points sont à 5 unités de (3, 0) dans un repère orthonormé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Décris le lieu des points P tels que PA + PB = AB.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Décris le lieu des milieux de segments joignant un point fixe O aux points P d'un cercle centré en O, de rayon 8 cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Quel lieu vérifie $x^2 + y^2 = 9$ dans un repère orthonormé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Quels points sont à la fois à 2 cm d'une droite et à 2 cm d'un point O situé sur cette droite ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Étudie le lieu des points P milieu de AQ lorsque Q parcourt une droite d et A est fixe, hors de d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Deux droites se coupent. Quel lieu décrit tous les points à égale distance des deux droites ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Dans un repère orthonormé, quel lieu vérifie $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Déterminer par le calcul le lieu des points $M(x; y)$ équidistants de $A(1; 2)$ et $B(5; 6)$. Interpréter.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

On donne $A(-3;0)$ et $B(3;0)$. Déterminer le lieu des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 50$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un point M parcourt le cercle de centre $C(6;0)$ et de rayon 4. On note I le milieu de $[OM]$, où O est l'origine.

1. Calculer la position de I quand $M = (10;0)$, $M = (2;0)$, $M = (6;4)$.
2. Démontrer que I décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On donne $A(0;0)$ et $B(3;0)$. Déterminer le lieu des points M tels que $MA = 2MB$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Déterminer le lieu des centres des cercles qui passent par le point $F(0;2)$ et sont tangents à l'axe des abscisses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On donne $A(-5;0)$ et $B(5;0)$. Déterminer le lieu des points P tels que le triangle APB soit rectangle en P, en utilisant la condition « pentes perpendiculaires » ou Pythagore.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une échelle $[AB]$ de 4 m glisse : A reste sur le sol (axe des x, $x \geq 0$) et B contre le mur (axe des y, $y \geq 0$).

1. Quelle est la position du milieu I de l'échelle lorsque l'échelle est verticale ? horizontale ? lorsque $A(2;0)$?
2. Démontrer que I reste à une distance constante de l'origine. Quel est le lieu de I ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

On donne $A(0;0)$ et $B(6;0)$. Déterminer le lieu des points C tels que le triangle ABC ait une aire de 12.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Déterminer le lieu des points $M(x;y)$ dont la somme des distances aux deux axes vaut 4, c'est-à-dire $|x| + |y| = 4$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Déterminer le lieu des points situés à la distance 3 de la droite $d : y = 2x$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Transformations d'énergies

Exercice 1

On étudie une centrale hydroélectrique à accumulation : l'eau stockée dans un lac de barrage en altitude descend par une conduite forcée, entraîne une turbine couplée à un alternateur, puis le courant est acheminé vers un transformateur avant de rejoindre le réseau électrique.

1. Établir la **chaîne énergétique** complète du système (eau dans le barrage → conduite forcée → turbine → alternateur), en précisant pour chaque maillon la forme d'énergie reçue, l'énergie utile transférée et l'énergie perdue.
2. En prenant un réservoir contenant $V = 2{,}0 \times 10^6$ m^3 d'eau situés à une hauteur moyenne $h = 300$ m au-dessus de la turbine ($\rho_{\text{eau}} = 1000$ kg/m^3, $g = 9{,}81$ N/kg), calculer l'énergie potentielle de pesanteur disponible.
3. Si le rendement global de la centrale (conduite + turbine + alternateur) est de 82%, quelle énergie électrique utile est produite (en J et en MWh) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Une balle de masse $m = 0{,}40$ kg est lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 20$ m au-dessus du sol ($g = 9{,}81$ N/kg). On néglige les frottements de l'air.

1. Calculer l'énergie mécanique totale E_m de la balle au moment du lâcher.
2. En déduire sa vitesse v_{sol} juste avant de toucher le sol ($h = 0$).
3. À quelle altitude h_1 l'énergie cinétique de la balle est-elle égale au triple de son énergie potentielle de pesanteur ($E_c = 3E_p$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Un wagonnet de montagnes russes de masse $m = 500$ kg passe au point culminant A (altitude $h_A = 30$ m) à la vitesse $v_A = 4{,}0$ m/s, puis descend jusqu'au creux B (altitude $h_B = 12$ m). On prend $g = 10$ N/kg.

1. Calculer l'énergie mécanique totale du wagonnet en A.
2. En supposant les frottements négligeables entre A et B, déterminer l'énergie cinétique et la vitesse du wagonnet au point B.
3. En réalité, 15% de l'énergie mécanique initiale en A est dissipée sous forme thermique par les frottements entre A et B. Quelle est alors la vitesse réelle v'_B au point B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Un cycliste (ensemble vélo + pilote de masse totale $m = 80$ kg) roule sur une route horizontale à $v_1 = 36$ km/h. Il freine modérément pour ralentir à $v_2 = 18$ km/h, puis freine à nouveau jusqu'à l'arrêt complet ($v_3 = 0$).

1. Convertir v_1 et v_2 en m/s, puis calculer l'énergie cinétique du cycliste à ces deux vitesses.
2. Quelle quantité d'énergie thermique est dissipée dans les freins durant le premier ralentissement (36 km/h → 18 km/h), puis durant le second (18 km/h → 0) ?
3. Comment expliquer que le premier freinage dégage trois fois plus de chaleur que le second alors que la baisse de vitesse (18 km/h) est identique ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Un lanceur de flipper (ou catapulte verticale) utilise un ressort de constante de raideur $k = 800$ N/m comprimé d'une longueur $x = 0{,}15$ m pour propulser une bille de masse $m = 0{,}20$ kg. On rappelle que l'énergie potentielle élastique d'un ressort vaut $E_{\text{él}} = \frac{1}{2}kx^2$ et on prend $g = 10$ N/kg (frottements négligés).

1. Calculer l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort comprimé.

2. Si le tir est horizontal, avec quelle vitesse v la bille quitte-t-elle le ressort détendu ?
3. Si le tir est dirigé verticalement vers le haut, quelle hauteur maximale h la bille atteint-elle au-dessus de sa position de départ détendue (on néglige x devant h, ou on mesure h à partir du point où le ressort est comprimé) ? Préciser les transformations d'énergie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Une voiture à moteur thermique consomme en moyenne 6,0 L d'essence pour parcourir 100 km. Le pouvoir calorifique de l'essence est de 35 MJ/L. On estime la répartition énergétique du moteur ainsi :

- 40% de l'énergie est perdue par les gaz d'échappement ;
- 32% est évacuée par le circuit de refroidissement ;
- 6% est dissipée par les frottements mécaniques internes ;
- le reste constitue l'énergie mécanique utile transmise aux roues motrices.

1. Quelle est l'énergie chimique totale consommée sur ce trajet de 100 km ?
2. Quel est le rendement énergétique global de la motorisation ? Calculer la quantité d'énergie associée à chacun des quatre flux (échappement, refroidissement, frottements, roues).
3. En supposant une voiture électrique équivalente ayant un rendement global de 80% (batterie + moteur) pour fournir la même énergie utile aux roues sur 100 km, quelle énergie électrique (en MJ et en kWh) doit-elle consommer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Une maison est équipée de 24 m^2 de panneaux photovoltaïques dont le rendement de conversion solaire $\rightarrow$ électrique est $\eta = 18\%$. Dans cette région, chaque mètre carré de toiture reçoit en moyenne une énergie solaire annuelle de 1200 kWh/m^2.

1. Quelle est l'énergie solaire totale reçue par les panneaux en une année (en kWh) ?
2. Calculer l'énergie électrique produite sur l'année, en kWh puis en gigajoules (GJ).
3. Le foyer consomme 4500 kWh d'électricité par an. La production annuelle couvre-t-elle ce besoin ? Si oui, quel est le surplus (ou le déficit) et pourquoi le foyer reste-t-il tout de même dépendant du réseau (ou d'une batterie) au fil des saisons ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Un pendule simple est constitué d'une boule de masse $m = 0{,}50$ kg suspendue à un fil inextensible de longueur $L = 1{,}25$ m. On écarte le pendule d'un angle $\theta = 60^\circ$ par rapport à la verticale et on le lâche sans vitesse initiale ($g = 10$ N/kg). On choisit comme référence d'énergie potentielle $E_p = 0$ au point le plus bas de la trajectoire.

1. Montrer par géométrie que la hauteur initiale h_0 de la boule au-dessus du point le plus bas vaut $h_0 = L(1 - \cos\theta)$, puis calculer h_0 et $E_p(0)$.
2. En l'absence de frottements, calculer la vitesse maximale de la boule lors de son passage à la verticale.
3. En réalité, à cause de la résistance de l'air, le pendule perd 10% de son énergie mécanique à chaque demi-oscillation (un aller simple). Quelle énergie mécanique reste-t-il après une oscillation complète (aller-retour), et à quelle hauteur maximale h_2 remonte-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

On compare deux ampoules fournissant exactement la même **puissance lumineuse utile** de 3,0 W :

- une ancienne ampoule à incandescence consommant une puissance électrique de 60 W ;
- une ampoule LED consommant une puissance électrique de 9,0 W.

1. Calculer le rendement lumineux de chaque ampoule.

2. Pour une utilisation de 1000 heures par an, calculer l'énergie électrique consommée et l'énergie dissipée sous forme thermique (chaleur) par chacune des deux ampoules (en kWh).
3. Au tarif de 0,28 CHF/kWh, quelle économie financière annuelle réalise-t-on en remplaçant 10 ampoules à incandescence par 10 ampoules LED ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Une maison a besoin de $Q_{\text{besoin}} = 12\,600$ kWh d'énergie thermique par an pour son chauffage. On compare deux systèmes :

- **Système A** : des radiateurs électriques directs (effet Joule, rendement 100%).
- **Système B** : une pompe à chaleur (PAC) géothermique dont le coefficient de performance vaut COP = 3,5, défini par $\text{COP} = \frac{Q_{\text{fournie}}}{E_{\text{électrique consommée}}}$.

1. Quelle énergie électrique consomme le système A sur l'année ?
2. Quelle énergie électrique consomme le système B pour fournir les mêmes 12 600 kWh de chaleur ?
3. Comment un COP = 3,5 (supérieur à 1) reste-t-il parfaitement compatible avec le principe de conservation de l'énergie ? Calculer l'énergie prélevée dans le sol sur l'année.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Une bille descend un plan incliné sans frottement. Quelle transformation d'énergie domine ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un ressort comprimé se détend et lance un chariot. Quelle réserve d'énergie diminue pendant le lancement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une LED reçoit 10 J d'énergie électrique et fournit 3 J sous forme de lumière. Dans un bilan où tout le reste devient thermique, combien de joules sont dissipés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

En freinant, un vélo ralentit et ses patins chauffent. D'où provient principalement l'énergie thermique ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une masse de 2 kg descend sans frottement sur 3 m de dénivelé. Avec g = 10 N/kg, quel gain d'énergie cinétique ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un chariot de 2 kg a une vitesse de 5 m/s. Calcule son énergie cinétique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Une pierre est lancée verticalement vers le haut. En négligeant l'air, qu'advient-il de son énergie cinétique au sommet ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un panneau photovoltaïque alimente un moteur qui soulève une charge. Quelles formes d'énergie relient le Soleil à la charge ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Une machine reçoit 500 J et transfère 350 J d'énergie utile. Quel est son rendement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un chariot double sa vitesse sans changer de masse. Par quel facteur son énergie cinétique change-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une alpiniste de 60 kg (équipement compris) gravit 1 000 m de dénivelé ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer l'énergie potentielle de pesanteur gagnée, en kJ puis en kWh.
2. Ses muscles ont un rendement d'environ 25 %. Quelle énergie chimique doit-elle dépenser ?
3. Une barre de chocolat de 100 g fournit environ 2 200 kJ. Combien de barres cela représente-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

On lâche une pierre depuis le haut d'une falaise de 20 m ($g = 10$ N/kg, frottements négligés).

1. Quelle transformation d'énergie a lieu pendant la chute ?
2. Calculer la vitesse de la pierre en bas, en m/s puis en km/h.
3. Cette vitesse dépend-elle de la masse de la pierre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une voiture de 1 000 kg roule à 50 km/h, puis à 100 km/h ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer son énergie cinétique dans les deux cas.
2. Par combien l'énergie est-elle multipliée quand la vitesse double ?
3. De quelle hauteur faudrait-il faire tomber la voiture pour qu'elle atteigne ces vitesses ? Commenter du point de vue de la sécurité routière.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On lâche la boule d'un pendule depuis une hauteur de 20 cm au-dessus de son point le plus bas ($g = 10$ N/kg, frottements négligés).

1. Quelle est sa vitesse au point le plus bas ?
2. Jusqu'à quelle hauteur remonte-t-elle de l'autre côté ?
3. En réalité, les oscillations diminuent peu à peu. Pourquoi ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un ressort de constante $k = 200$ N/m est comprimé de 10 cm. L'énergie élastique stockée vaut $E_e = \frac{1}{2}kx^2$. Il sert à lancer verticalement une bille de 50 g ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer l'énergie élastique stockée.
2. À quelle hauteur la bille peut-elle monter (frottements négligés) ?
3. Que devient cette hauteur si l'on comprime le ressort de 20 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Dans une centrale hydroélectrique, l'eau d'un lac tombe de 500 m jusqu'aux turbines ($g = 10$ N/kg, 1 m^3 d'eau a une masse de 1 000 kg).

1. Calculer l'énergie potentielle libérée par 1 m^3 d'eau, en J puis en kWh.
2. La centrale a un rendement de 90 %. Quelle énergie électrique produit chaque m^3 ?
3. Combien de m^3 faut-il pour couvrir la consommation annuelle d'un ménage (4 500 kWh) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une voiture de 1 200 kg freine de 72 km/h jusqu'à l'arrêt. Toute son énergie cinétique est transformée en chaleur dans les 4 disques de frein en acier (5 kg chacun, $c = 450$ J/(kg $\cdot$ °C)).

1. Calculer l'énergie cinétique initiale.
2. Calculer l'élévation de température des disques.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

L'électricité d'une centrale thermique parvient à un moteur électrique selon la chaîne suivante :

- centrale (énergie chimique $\to$ électrique) : rendement 40 % ;
- lignes de transport : rendement 90 % ;
- moteur (électrique $\to$ mécanique) : rendement 85 %.

1. Calculer le rendement global.
2. Sur 1 000 J d'énergie chimique, combien de joules deviennent de l'énergie mécanique ? Sous quelle forme est perdu le reste ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un wagonnet de montagnes russes de 500 kg part à l'arrêt d'une hauteur de 30 m. Au point B, situé à 10 m de hauteur, il roule à 18 m/s ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer la diminution d'énergie potentielle entre le départ et B.
2. Calculer l'énergie cinétique en B.
3. Quelle énergie a été dissipée par les frottements ? Quel pourcentage cela représente-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une balle lâchée d'une hauteur de 2 m perd 20 % de son énergie mécanique à chaque rebond.

1. Calculer la hauteur atteinte après chacun des trois premiers rebonds.

2. Après combien de rebonds remonte-t-elle à moins de 50 cm ?
3. Où est passée l'énergie perdue ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Énergie en puissance

Exercice 1

Un déménageur tire une caisse de masse $m = 40$ kg en ligne droite sur un sol horizontal sur une distance $d = 25$ m, à vitesse constante, à l'aide d'une corde inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ au-dessus de l'horizontale. La tension exercée dans la corde est constante et vaut $F = 120$ N.

1. Quel est le travail du poids $\vec{P}$ et celui de la réaction normale $\vec{R}_N$ du sol durant ce déplacement ? Justifier.
2. Calculer le travail moteur $W(\vec{F})$ fourni par la corde sur les 25 m.
3. La vitesse étant constante, la somme des travaux des forces appliquées est nulle. En déduire le travail des forces de frottement $W(\vec{f})$ ainsi que l'intensité f de la force de frottement (supposée horizontale et opposée au mouvement).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Un ascenseur d'une masse totale à pleine charge $M = 1200$ kg s'élève verticalement à vitesse constante d'une hauteur $h = 18$ m en $t = 15$ s ($g = 9{,}81$ N/kg).

1. Calculer le travail mécanique utile W_u effectué pour monter la cabine.
2. Calculer la puissance mécanique utile P_u correspondante. Retrouver ce résultat directement à l'aide de la vitesse de montée v et de la force de levage.
3. Le moteur électrique de l'ascenseur absorbe en continu une puissance électrique $P_{\text{abs}} = 18$ kW. Calculer le rendement η de l'installation et l'énergie perdue (en kJ) pendant cette montée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Une locomotive électrique développe une puissance utile constante aux roues $P = 3{,}6$ MW lorsqu'elle fonctionne à plein régime.

1. Sur un tronçon horizontal, le train roule à la vitesse maximale de $v_1 = 108$ km/h. Calculer l'intensité de la force de traction F_1 exercée par la locomotive (qui équilibre les résistances à l'avancement).
2. Le train aborde ensuite une rampe nécessitant une force de traction $F_2 = 180$ kN pour vaincre à la fois la pente et les frottements. À quelle vitesse maximale v_2 (en m/s et en km/h) la locomotive peut-elle grimper cette rampe à pleine puissance ?
3. Quel travail (en GJ) la locomotive fournit-elle aux roues si elle maintient cette puissance pendant 15 minutes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

On souhaite hisser un moteur hors d'un véhicule sur une hauteur $h = 3{,}0$ m. Sa masse est $m = 240$ kg ($g = 10$ N/kg). On utilise un palan comportant 4 brins de corde soutenant la poulie mobile.

1. Dans le cas d'un palan idéal (sans frottements ni masse des poulies), quelle force $F_{\text{idéale}}$ faut-il exercer sur l'extrémité libre de la corde, et quelle longueur d de corde faut-il tirer ?
2. Vérifier que le travail exercé par l'opérateur est égal au travail utile pour soulever le moteur.
3. En réalité, les poulies présentent des frottements et il faut tirer avec une force réelle $F_{\text{réelle}} = 750$ N. Calculer le rendement η du palan et l'énergie perdue en chaleur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

On hisse une caisse de masse $m = 50$ kg le long d'un plan incliné de longueur $L = 8{,}0$ m permettant de franchir une dénivellation $h = 2{,}4$ m. On pousse parallèlement à la pente avec une force constante $F = 210$ N pendant $t = 12$ s ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer le travail utile W_u correspondant au gain d'énergie potentielle, et le travail moteur W_m réellement fourni par la force F.
2. Calculer le rendement η de ce plan incliné et l'intensité f de la force de frottement entre la caisse et le plan (la caisse monte à vitesse constante).
3. Quelle est la puissance mécanique moyenne développée par la personne qui pousse ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Un treuil manuel sert à remonter un seau d'eau de masse $m = 20$ kg depuis un puits de profondeur $h = 15$ m ($g = 10$ N/kg). Le tambour sur lequel s'enroule la corde a un rayon $r = 0{,}12$ m, et la manivelle a un rayon $R = 0{,}48$ m.

1. Dans le cas idéal (sans frottements), quel est le gain mécanique $\frac{R}{r}$ de ce treuil, et quelle force perpendiculaire à la manivelle $F_{\text{idéale}}$ faut-il exercer pour maintenir ou monter le seau régulièrement ?
2. En réalité, à cause des frottements dans les paliers, le rendement mécanique du treuil est de $\eta = 85\%$. Calculer le travail réel à fournir et l'intensité de la force réelle $F_{\text{réelle}}$ sur la manivelle.
3. Combien de tours complets de manivelle faut-il effectuer pour remonter le seau ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Une station de pompage alimente un château d'eau situé à une hauteur $h = 25$ m avec un débit volumique de 18 m^3/h ($\rho_{\text{eau}} = 1000$ kg/m^3, $g = 10$ N/kg). L'installation comprend un moteur électrique de rendement $\eta_1 = 85\%$ accouplé à une pompe de rendement $\eta_2 = 75\%$.

1. Calculer la masse d'eau élevée par seconde (débit massique) et la puissance hydraulique utile P_u nécessaire.
2. Calculer le rendement global η_{global} du groupe motopompe.
3. En déduire la puissance électrique absorbée P_{abs} par le moteur et l'énergie électrique consommée en 8 heures de fonctionnement (en kWh).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Un cycliste (masse totale cycliste + vélo $M = 75$ kg) gravit un col de longueur $L = 1{,}5$ km présentant une pente régulière de 8% ($\sin\alpha = 0{,}08$) à une vitesse constante de $v = 18$ km/h. L'ensemble des forces de frottement (air + roulement) vaut $f = 22$ N. On prend $g = 9{,}81$ N/kg.

1. Calculer la composante du poids parallèle à la pente ($P_{\parallel} = Mg\sin\alpha$) et en déduire la force motrice totale F que doit produire le cycliste pour maintenir sa vitesse constante.
2. Quelle puissance mécanique utile $P_{\text{méc}}$ développe-t-il ?
3. Sachant que le rendement musculaire du corps humain est d'environ $\eta = 24\%$, quelle énergie métabolique totale (en kJ) le cycliste dépense-t-il pour gravir ces 1,5 km ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Sur un chantier, une grue doit soulever verticalement une palette de briques de masse $m = 1{,}5$ t jusqu'à une dalle située à $h = 24$ m de hauteur ($g = 10$ N/kg). Le moteur électrique de la grue a une puissance électrique nominale $P_{\text{élec}} = 12$ kW et le mécanisme de levage possède un rendement global de $\eta = 75\%$.

1. Calculer la puissance mécanique utile P_u disponible au crochet de la grue.
2. Calculer le travail utile W_u nécessaire pour lever la palette, puis le temps minimal t de levage.

3. En déduire la vitesse constante de levage v et l'énergie électrique consommée (en kJ et en Wh) lors de cette opération.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Un train de masse $m = 200$ tonnes roule sur une voie horizontale à $v_1 = 144$ km/h. À l'approche d'une gare, il ralentit régulièrement jusqu'à $v_2 = 36$ km/h en $\Delta t = 25$ s grâce à un freinage électrique par récupération (ses moteurs fonctionnent en générateurs).

1. Calculer la variation d'énergie cinétique $|\Delta E_c|$ du train pendant ce freinage (en MJ).
2. En déduire la puissance mécanique moyenne de freinage.
3. Si 65% de cette énergie mécanique est récupérée sous forme d'énergie électrique utile réinjectée sur la ligne de contact (caténaire), calculer l'énergie électrique récupérée (en MJ et en kWh) ainsi que la puissance électrique moyenne renvoyée sur le réseau.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un moteur transfère 600 J en 12 s. Quelle puissance moyenne fournit-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Une lampe de puissance constante 24 W fonctionne 30 s. Quelle énergie utilise-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un appareil de 150 W utilise 9 000 J. Combien de temps a-t-il fonctionné à cette puissance ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Deux élèves montent une même charge à la même hauteur. Le premier met 4 s et le second 8 s. Compare leurs puissances moyennes utiles.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une résistance de 2 kW fonctionne pendant 30 min. Quelle énergie consomme-t-elle en kWh ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Convertis 0,25 kWh en joules.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un treuil relève 30 kg de 4 m en 6 s à vitesse constante. Prends g = 10 N/kg. Calcule sa puissance utile.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Une pompe possède un rendement de 80 % et reçoit une puissance de 250 W. Quelle est sa puissance utile ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un appareil reste allumé 2 h à 40 W et ensuite 1 h à 100 W. Quelle énergie totale en Wh ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un moteur exerce une traction de 60 N sur un chariot roulant à 3 m/s. La force est dans le sens du mouvement. Calcule la puissance mécanique fournie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un élève de 60 kg monte un escalier de 3 m de hauteur ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer le travail de son poids (énergie potentielle gagnée).
2. Calculer sa puissance s'il monte en 4 s, puis en courant en 2 s.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une bouilloire de 2 000 W fonctionne 3 minutes par jour, toute l'année. Le kWh coûte 0,30 CHF.

1. Calculer l'énergie consommée par jour en kWh.
2. Calculer la consommation annuelle et son coût.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un téléviseur consomme 5 W en veille. Il reste en veille 20 heures par jour.

1. Calculer l'énergie consommée en veille en un an (en kWh).
2. Une commune compte 8 000 ménages équipés de la même façon. Quelle énergie est consommée par les veilles ?
3. Combien de m^3 d'eau devraient tomber de 500 m dans une centrale (rendement 90 %, 1,25 kWh par m^3) pour produire cette énergie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Sur autoroute, une voiture roule à 90 km/h. Les frottements (air et roulement) exercent une force de 600 N.

1. Convertir la vitesse en m/s.
2. Quelle puissance le moteur doit-il fournir aux roues pour maintenir cette vitesse ? (On utilise $P = F \times v$.)
3. Convertir cette puissance en chevaux (1 ch = 736 W).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une pompe doit monter 3 m^3 d'eau à 12 m de hauteur en 10 minutes ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer l'énergie utile nécessaire.
2. Calculer la puissance utile.

3. La pompe a un rendement de 75 %. Quelle puissance électrique absorbe-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un cycliste entraîné peut fournir 200 W pendant une heure.

1. Quelle énergie fournit-il, en kJ et en kWh ?
2. Au tarif de 0,30 CHF le kWh, quelle est la « valeur » de cette énergie ?
3. Pendant combien de temps cette énergie ferait-elle fonctionner un aspirateur de 1 500 W ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un ascenseur de 800 kg (cabine et passagers) monte de 20 m en 25 s à vitesse constante ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer la puissance utile du moteur.
2. Un contrepoids de 600 kg descend pendant que la cabine monte. Quelle puissance le moteur doit-il alors fournir ?
3. Quel est l'intérêt du contrepoids ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Une ampoule LED de 8 W éclaire autant qu'une ampoule à incandescence de 60 W.

1. Calculer l'énergie consommée par chaque ampoule en 1 000 heures (en kWh).
2. Calculer l'économie réalisée au tarif de 0,30 CHF le kWh.
3. L'ampoule à incandescence produit environ 3 W de lumière. Calculer son rendement. Que devient le reste ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un panneau solaire de 2 m^2 reçoit un rayonnement de 1 000 W/m^2 en plein soleil. Son rendement est de 20 %.

1. Calculer la puissance électrique produite en plein soleil.
2. Calculer l'énergie produite pendant l'équivalent de 5 heures de plein soleil.
3. Combien de panneaux faudrait-il pour produire en un an (1 000 heures équivalentes de plein soleil) les 4 500 kWh d'un ménage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une grue soulève une palette de 1 500 kg de 30 m ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer le travail nécessaire.
2. Le moteur a une puissance utile de 15 kW. Combien de temps dure la montée ?
3. À quelle vitesse la palette monte-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Calorimétrie

Exercice 1

On verse 1,5 L d'eau ($m = 1{,}5$ kg) à une température initiale $T_i = 15$°C dans une bouilloire électrique de puissance $P = 2000$ W. L'eau atteint l'ébullition ($T_f = 100$°C) au bout de 5 minutes et 10 secondes. On donne $c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg · °C).

1. Calculer l'énergie thermique utile Q_{utile} reçue par l'eau.

2. Calculer l'énergie électrique $E_{\text{élec}}$ consommée par la bouilloire durant cette chauffe.
3. Quel est le rendement thermique η de la bouilloire, et à quoi est due l'énergie perdue ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Dans un récipient parfaitement isolé (pertes thermiques nulles), on mélange $m_1 = 300$ g d'eau froide à $T_1 = 20°\text{C}$ et $m_2 = 500$ g d'eau chaude à $T_2 = 76°\text{C}$.

1. Écrire l'équation de bilan thermique traduisant la conservation de l'énergie à l'équilibre ($Q_1 + Q_2 = 0$).
2. Déterminer la température d'équilibre T_e du mélange.
3. Vérifier le résultat en calculant numériquement Q_1 et Q_2 (avec $c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg $\cdot\,°$C)).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Pour identifier la nature d'un bloc métallique de masse $m_m = 500$ g, on le chauffe dans de l'eau bouillante jusqu'à $T_m = 100°\text{C}$, puis on le plonge rapidement dans un calorimètre idéal contenant $m_e = 450$ g d'eau à $T_e = 20°\text{C}$. La température finale d'équilibre mesurée est $T_f = 28°\text{C}$.

1. Calculer la quantité de chaleur Q_{eau} reçue par l'eau du calorimètre ($c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg $\cdot\,°$C)).
2. En déduire la capacité thermique massique c_m du métal.
3. Parmi les métaux suivants, lequel correspond le mieux à la mesure ? (Cuivre : 385, Acier doux : 418–460, Aluminium : 900, Plomb : 130, en J/(kg $\cdot\,°$C)).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

En laboratoire, on souhaite étalonner un calorimètre réel qui absorbe lui aussi une partie de la chaleur lors des expériences. Il contient initialement $m_1 = 200$ g d'eau à $T_1 = 18°\text{C}$ (en équilibre thermique avec les parois du calorimètre). On y verse $m_2 = 200$ g d'eau chaude à $T_2 = 62°\text{C}$. On mesure une température d'équilibre $T_e = 38°\text{C}$ ($c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg $\cdot\,°$C)).

1. Quelle serait la température d'équilibre théorique si le calorimètre n'absorbait aucune chaleur ?
2. Calculer la chaleur Q_2 cédée par l'eau chaude et la chaleur Q_1 reçue par l'eau froide, puis en déduire la chaleur Q_{cal} absorbée par le calorimètre.
3. Calculer la capacité thermique C_{cal} du calorimètre (en J/°C) et sa **valeur en eau** μ (en g, masse d'eau fictive qui absorberait la même énergie).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

On sort du congélateur un bloc de glace de masse $m = 500$ g à la température de $-20°\text{C}$ et on le chauffe jusqu'à obtenir de l'eau liquide à $+25°\text{C}$. Données : $c_{\text{glace}} = 2100$ J/(kg $\cdot\,°$C), $L_f = 334\,000$ J/kg (chaleur latente de fusion de la glace), $c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg $\cdot\,°$C).

1. Décomposer la transformation en trois étapes distinctes et calculer l'énergie thermique Q_1, Q_2, Q_3 requise pour chaque étape.
2. Calculer l'énergie totale Q_{tot} à fournir (en kJ).
3. Quel pourcentage de l'énergie totale représente l'étape de fusion à 0°C ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Dans un verre isolant contenant $m_e = 250$ g d'eau à $T_e = 20°\text{C}$, on plonge $m_g = 100$ g de glace fondante à 0°C. On néglige les échanges avec le verre et l'air. Données : $c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg $\cdot\,°$C), $L_f = 334\,000$ J/kg.

1. Quelle quantité maximale de chaleur $Q_{\text{cédée max}}$ l'eau liquide peut-elle libérer en refroidissant de 20°C à 0°C ?

2. Quelle quantité de chaleur Q_{fusion} faudrait-il pour faire fondre la totalité des 100 g de glace ?
3. En déduire l'état final exact du mélange : température finale, masse d'eau liquide et masse de glace restante.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

On place $m_g = 80$ g de glace à -10°C dans un calorimètre idéal contenant $m_e = 400$ g d'eau chaude à 40°C. Données : $c_{\text{glace}} = 2100$ J/(kg · °C), $L_f = 334\,000$ J/kg, $c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg · °C).

1. Vérifier par le calcul que toute la glace fond.
2. Écrire l'équation complète de bilan thermique en notant T_f (> 0°C) la température finale du mélange.
3. Résoudre l'équation pour trouver T_f.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

On fait barboter $m_v = 20$ g de vapeur d'eau à 100°C dans un calorimètre idéal contenant $m_e = 500$ g d'eau froide à $T_1 = 15$°C. La vapeur se condense intégralement en eau liquide. Données : $L_v = 2\,260\,000$ J/kg (chaleur latente de vaporisation de l'eau), $c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg · °C).

1. Calculer l'énergie thermique Q_{cond} libérée par la seule condensation des 20 g de vapeur en eau liquide à 100°C.
2. Pourquoi les brûlures par la vapeur à 100°C sont-elles beaucoup plus graves que celles par de l'eau liquide à 100°C ?
3. Déterminer la température d'équilibre T_f du mélange.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un chauffe-eau électrique instantané possède une puissance électrique de $P = 18$ kW et un rendement thermique $\eta = 95\%$. L'eau entre à $T_i = 12$°C et doit sortir à $T_f = 42$°C ($c_{\text{eau}} = 4180$ J/(kg · °C), $\rho_{\text{eau}} = 1{,}0$ kg/L).

1. Calculer la puissance thermique utile P_{th} transférée à l'eau.
2. Quelle énergie thermique faut-il fournir pour chauffer 1 kg (1 L) d'eau de 12°C à 42°C ?
3. En déduire le débit massique maximal (en kg/s) puis le débit volumique (en L/min) que peut fournir ce chauffe-eau à 42°C.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Une automobile de masse $M = 1200$ kg roulant à $v = 108$ km/h effectue un freinage d'urgence jusqu'à l'arrêt complet. On admet que 70% de l'énergie cinétique initiale est absorbée sous forme thermique par les deux disques de frein avant en acier, de masse $m_d = 6{,}0$ kg chacun ($c_{\text{acier}} = 450$ J/(kg · °C)).

1. Calculer l'énergie cinétique initiale de la voiture.
2. Quelle quantité de chaleur Q_{avant} est absorbée au total par les deux disques avant (et par un seul disque) ?
3. En négligeant le refroidissement par l'air pendant la brève durée du freinage, calculer l'élévation de température ΔT des disques avant.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On chauffe 0,5 kg d'eau de 20 à 30 °C. Prends une capacité thermique massique de 4 200 J/(kg · °C). Calcule l'énergie reçue.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un métal de masse 0,2 kg et de capacité thermique massique 500 J/(kg · °C) reçoit 1 000 J. Quelle hausse de température ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Dans un récipient isolé, on mélange 200 g d'eau à 10 °C et 200 g à 50 °C. Néglige l'énergie absorbée par le récipient. Température finale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On mélange 100 g d'eau à 60 °C avec 300 g d'eau à 20 °C sans perte et dans un récipient de capacité négligeable. Quelle température finale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

De l'eau liquide refroidit de 37 à 29 °C. Avec la convention Q positif quand le système reçoit de l'énergie, donne le signe de Q pour l'eau.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un radiateur transfère 120 W à 0,4 kg d'eau pendant 70 s sans perte. Prends c = 4 200 J/(kg · °C). Quelle est la hausse de température ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Quelle énergie faut-il pour fondre 0,1 kg de glace déjà à 0 °C, avec une chaleur latente de fusion de 334 000 J/kg ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On apporte lentement de l'énergie à un mélange d'eau et de glace à l'équilibre sous pression ordinaire. Pourquoi la température reste-t-elle proche de 0 °C tant qu'il reste de la glace ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Deux blocs de même masse reçoivent la même énergie. A a une capacité thermique massique de 400 J/(kg · °C), B de 800. Lequel chauffe davantage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un récipient a une capacité thermique de 180 J/°C. Il se réchauffe de 15 °C. Quelle énergie absorbe-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On fait chauffer 2 L d'eau de 15°C à 100°C dans une bouilloire de 2 000 W ($c_{\text{eau}} = 4\,180$ J/(kg·°C), pertes négligées).

1. Calculer l'énergie nécessaire.
2. Combien de temps faut-il ?
3. En réalité, il faut 6 minutes. Calculer le rendement de la bouilloire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Dans un récipient isolé, on mélange 2 kg d'eau à 80°C et 3 kg d'eau à 20°C.

1. Écrire l'égalité entre l'énergie cédée par l'eau chaude et l'énergie reçue par l'eau froide.
2. Calculer la température finale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

On veut remplir une baignoire avec 100 L d'eau à 38°C, en mélangeant de l'eau chaude à 60°C et de l'eau froide à 15°C (pertes négligées).

Quels volumes d'eau chaude et d'eau froide faut-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Pour identifier un métal, on chauffe un bloc de 200 g à 100°C, puis on le plonge dans 300 g d'eau à 20°C dans un calorimètre parfait. La température finale est 30°C.

Capacités thermiques massiques : aluminium 900 ; fer 450 ; cuivre 385 ; plomb 130 J/(kg·°C) ; eau 4 180 J/(kg·°C).

1. Calculer l'énergie reçue par l'eau.
2. En déduire la capacité thermique massique du métal et l'identifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

On veut transformer 200 g de glace à 0°C en eau à 20°C. Chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 334$ kJ/kg ; $c_{\text{eau}} = 4\,180$ J/(kg · °C).

1. Calculer l'énergie nécessaire pour faire fondre la glace.
2. Calculer l'énergie pour chauffer ensuite l'eau de 0 à 20°C.
3. Quelle étape demande le plus d'énergie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On met 50 g de glaçons à 0°C dans 300 g de limonade à 25°C (assimilée à de l'eau). On néglige les échanges avec l'extérieur ($L_f = 334$ kJ/kg, $c = 4\,180$ J/(kg · °C)).

1. Les glaçons vont-ils fondre entièrement ? (Comparer l'énergie nécessaire à la fusion et l'énergie que peut céder la limonade en refroidissant jusqu'à 0°C.)
2. Calculer la température finale (au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On fait bouillir de l'eau dans une casserole sur une plaque de 2 000 W (rendement 100 %). La chaleur latente de vaporisation de l'eau vaut $L_v = 2\,260$ kJ/kg.

1. Quelle énergie faut-il pour vaporiser 1 L d'eau déjà à 100°C ?
2. Combien de temps faut-il ?
3. Pourquoi la température de l'eau reste-t-elle à 100°C pendant l'ébullition ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un chauffe-eau de 200 L réchauffe l'eau de 10°C à 60°C ($c = 4\,180$ J/(kg · °C)).

1. Calculer l'énergie nécessaire en J puis en kWh.
2. Calculer le coût au tarif de 0,30 CHF/kWh.
3. Avec une pompe à chaleur qui fournit 3 kWh de chaleur par kWh d'électricité, quel serait le coût ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On fournit la même énergie de 10 000 J à 1 kg d'eau et à 1 kg de fer ($c_{\text{eau}} = 4\,180$, $c_{\text{fer}} = 450$ J/(kg · °C)).

1. Calculer l'élévation de température de chacun.
2. Combien de fois plus le fer s'échauffe-t-il ?
3. Expliquer pourquoi les régions côtières ont des hivers plus doux et des étés plus frais que l'intérieur des continents.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

James Joule a montré que l'énergie mécanique peut se transformer en chaleur. Une chute d'eau mesure 50 m de haut ($g = 10$ N/kg, $c = 4\,180$ J/(kg · °C)).

1. Calculer l'énergie potentielle perdue par 1 kg d'eau.
2. Si toute cette énergie chauffait l'eau, de combien sa température augmenterait-elle ?
3. Pourquoi cette élévation est-elle difficile à mesurer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site