Recherche de fonctions — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

Suite de motifs géométriques (allumettes en ligne) : On construit une frise de **carrés accolés** avec des allumettes :

- Étape $n = 1$ (1 carré) : 4 allumettes.
- Étape $n = 2$ (2 carrés côte à côte) : 7 allumettes.
- Étape $n = 3$ (3 carrés côte à côte) : 10 allumettes.

1. Trouver la fonction $f(n)$ donnant le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n carrés accolés.
2. Combien d'allumettes faut-il pour 50 carrés ?
3. Avec une boîte de 250 allumettes, combien de carrés au maximum peut-on aligner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Grille d'allumettes carrée $n \times n$: Au lieu d'une seule ligne, on construit maintenant un grand carré quadrillé de dimension $n \times n$ (composé de n^2 petits carrés de 1 allumette de côté) :

- $n = 1$ (1×1) : 4 allumettes.
- $n = 2$ (2×2) : 12 allumettes.
- $n = 3$ (3×3) : 24 allumettes.

1. En comptant séparément les rangées **horizontales** et les colonnes **verticales** d'allumettes, établir la fonction $g(n)$ donnant le nombre total d'allumettes pour une grille $n \times n$.
2. Vérifier votre formule pour $n = 1, 2, 3$, puis calculer $g(10)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Le château de cartes : Pour construire un château de cartes à n étages :

- 1 étage : 2 cartes (un $\wedge$).
- 2 étages : 7 cartes (un $\wedge$ sur une barre horizontale reposant sur deux $\wedge$).
- 3 étages : 15 cartes.

1. Combien de cartes faut-il pour un château de 4 étages ?
2. En comptant le nombre de paires inclinées ($\wedge$) et le nombre de cartes horizontales à chaque étage, établir la formule générale $C(n)$ du nombre de cartes pour n étages.
3. Avec 2 jeux complets (104 cartes), quelle est la hauteur maximale (en étages) du château réalisable ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Motif géométrique en croix / escalier : On construit des croix symétriques à partir d'un carré central ($n = 0$: 1 carré) auquel on ajoute à chaque étape 1 carré au bout de chacune des 4 branches :

- $n = 0$: 1 carré
- $n = 1$: 5 carrés
- $n = 2$: 9 carrés

1. Donner la fonction $A(n)$ exprimant le nombre de carrés (d'aire 1 cm^2 chacun) à l'étape n.
2. Exprimer également le **périmètre** $P(n)$ de la figure obtenue à l'étape n (chaque carré a un côté de 1 cm).
3. À quelle étape n le périmètre atteint-il exactement 100 cm, et quelle est alors l'aire de la croix ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Empilement de boulets (pyramide à base carrée) : On empile des billes en une pyramide à base carrée : 1 bille au sommet, $4 = 2^2$ billes au 2^{e} niveau, $9 = 3^2$ au 3^{e} niveau, …, n^2 à la base.

1. Calculer le nombre total de billes $P(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Vérifier que la formule générale donnant la somme des n premiers carrés est :

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

en la testant pour $n = 4$ et $n = 5$, puis calculer le nombre de billes d'une pyramide de 12 étages.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Recherche de fonction à partir d'un tableau de valeurs (différences finies) : Lors d'une expérience, on relève les valeurs suivantes d'une fonction $f(n)$:

n	0	1	2	3	4
$f(n)$	3	6	11	18	27

1. Calculer les différences premières $f(n+1) - f(n)$, puis les différences secondes.
2. En déduire l'expression algébrique simple de $f(n)$ et prédire $f(10)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Problème d'optimisation (enclos contre un mur) : Un agriculteur dispose de 60 **m de clôture** pour délimiter un enclos rectangulaire adossé à un long mur rectiligne (le mur forme l'un des côtés du rectangle, donc la clôture ne sert que pour les 3 autres côtés).

On note x la longueur des deux côtés perpendiculaires au mur (en mètres).

1. Exprimer la longueur $L(x)$ du côté parallèle au mur en fonction de x, puis montrer que l'aire de l'enclos vaut :

$$\mathcal{A}(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$$

2. Compléter un tableau de valeurs pour $x \in \{5; 10; 12; 15; 18; 20; 25\}$.
3. Quelles dimensions donnent l'**aire maximale**, et quelle est cette aire ? *(Vérifier en écrivant $\mathcal{A}(x) = 450 - 2(x-15)^2$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Problème d'optimisation (boîte sans couvercle) : On prend une feuille cartonnée carrée de côté 18 cm. Dans chacun des 4 coins, on découpe un petit carré de côté x (avec $0 < x < 9$), puis on relève les 4 bords pour fabriquer une boîte parallélépipédique sans couvercle.

1. Exprimer en fonction de x les dimensions de la base carrée et la hauteur de la boîte, puis montrer que le volume vaut :

$$V(x) = x(18 - 2x)^2$$

2. Calculer $V(x)$ pour $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ cm.
3. Pour quelle valeur entière de x le volume est-il maximal ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Polygones et nombre d'intersections de droites : On trace dans un plan n droites en position générale (aucune paire n'est parallèle et jamais trois droites ne passent par le même point).

1. Compter le nombre maximal $I(n)$ de points d'intersection pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Expliquer pourquoi l'ajout d'une n^{e} droite crée exactement $n-1$ nouveaux points d'intersection, et en déduire la formule générale de $I(n)$.
3. Calculer le nombre maximal de régions $R(n)$ découpées dans le plan par ces n droites pour $n = 1, 2, 3, 4$, puis vérifier la formule $R(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème d'optimisation géométrique (chemin minimal par réflexion) : Une station de pompage P doit être construite sur la rive rectiligne d'un canal (l'axe des abscisses $y = 0$) pour alimenter deux villages situés du même côté du canal : $A(1; 3)$ et $B(9; 5)$ (unités en km).

On veut choisir la position $P(x; 0)$ sur la berge qui **minimise la longueur totale de tuyau** $f(x) = PA + PB$.

1. Construire le symétrique A' de A par rapport à la rive ($y = 0$). Expliquer pourquoi $PA + PB = PA' + PB$, et pour quelle position de P cette somme est **minimale**.
2. Calculer l'abscisse exacte x du point optimal $P(x; 0)$ ainsi que la longueur minimale $f(x_{\text{min}})$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On donne le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	7	11	15	19

1. Calculer les différences entre deux valeurs consécutives de $f(x)$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Calculer $f(25)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On donne le tableau :

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	2	6	12	20	30

1. Calculer les différences premières, puis les différences secondes. Que remarque-t-on ?
2. Vérifier que $u(n) = n(n + 1)$.
3. Calculer $u(10)$ et trouver n tel que $u(n) = 132$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Les **nombres triangulaires** comptent les points d'un triangle : $T(1) = 1$, $T(2) = 3$, $T(3) = 6$, $T(4) = 10$ (on ajoute une rangée de n points à chaque étape).

1. Calculer $T(5)$ et $T(6)$.
2. En accolant deux triangles identiques pour former un rectangle, montrer que $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Combien de points compte le triangle de 100 rangées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On entoure un carré de $n \times n$ carreaux blancs d'une bordure d'une rangée de carreaux gris.

1. Combien de carreaux gris faut-il pour $n = 1$, 2, 3 ?
2. Trouver une formule $G(n)$ et la justifier de deux manières.
3. Pour quelle valeur de n faut-il 100 carreaux gris ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une bougie mesure 20 cm. Deux heures après l'avoir allumée, elle ne mesure plus que 14 cm. On suppose qu'elle se consume régulièrement.

1. Trouver l'expression de la longueur $L(t)$ (en cm) en fonction du temps t (en h).
2. Quelle est sa longueur après 5 h ?
3. Au bout de combien de temps sera-t-elle entièrement consumée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Lors d'une expérience, on relève :

x	1	2	3	4	6
y	12	6	4	3	2

1. Les différences sont-elles constantes ? Le quotient $\frac{y}{x}$?
2. Calculer le produit $x \times y$ pour chaque colonne. Conclure.
3. Donner un exemple de situation physique décrite par ce type de relation.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On donne :

n	0	1	2	3	4
$v(n)$	3	6	12	24	48

1. Les différences sont-elles constantes ? Et les quotients $\frac{v(n+1)}{v(n)}$?
2. Trouver l'expression de $v(n)$.
3. Calculer $v(10)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On cherche le rectangle d'aire 36 cm^2 dont le périmètre est le plus petit possible.

1. En notant x la longueur d'un côté, exprimer l'autre côté puis le périmètre $P(x)$.
2. Compléter un tableau pour $x = 1, 2, 3, 4, 6, 9$.
3. Quel rectangle convient ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Dans un groupe de n personnes, chacune serre la main de toutes les autres une seule fois. On note $p(n)$ le nombre de poignées de main.

1. Compléter : $p(1) = 0$, $p(2) = 1$, $p(3) = 3$, $p(4)$, $p(5)$.
2. Observer les différences et en déduire une méthode de calcul de $p(n+1)$ à partir de $p(n)$.
3. Vérifier que $p(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ convient et calculer $p(30)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On compte le nombre total de carrés (de toutes tailles) dans une grille de $n \times n$ petits carrés : $S(1) = 1$, $S(2) = 5$, $S(3) = 14$, $S(4) = 30$.

1. Expliquer pourquoi $S(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.
2. Calculer $S(5)$ et $S(8)$ (le nombre de carrés d'un échiquier).
3. Vérifier la formule $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n = 4$ et $n = 8$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une fonction affine vérifie f(2) = 11 et f(5) = 23. Trouve sa règle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une suite augmente de 7 à chaque étape et vaut 12 à l'étape 1. Donne son terme à l'étape n $\geq$ 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une rangée de n hexagones identiques a exactement un côté commun entre voisins et aucune autre arête commune. Combien d'arêtes distinctes dessine-t-on, côtés partagés inclus ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un motif carré de n lignes et n colonnes contient un point à chaque emplacement. Combien de points supplémentaires entre les étapes n et n + 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une suite part de 9 à l'étape zéro et triple à chaque étape. Écris la formule au rang n.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une fonction affine vaut 21 en 0 et 9 en 4. Donne son zéro.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une boîte contient une grille de n rangées de n objets, sauf les n positions d'une diagonale qui sont vides. Donne le nombre d'objets.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Une fonction de la forme f(x) = ax² passe par (3, 27). Quel est a ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Les trois couples (1, 4), (2, 7), (3, 10) suffisent-ils à garantir qu'une fonction quelconque est affine sur tous les réels ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une grille rectangulaire a n colonnes et n + 2 rangées. Donne son nombre de cases sous forme développée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site