Polyèdres et perspective — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

Règles de la perspective cavalière : On souhaite dessiner en perspective cavalière un pavé droit $ABCDEFGH$ de longueur $AB = 6$ cm (face avant), de hauteur $AD = 4$ cm et de profondeur $AE = 4$ cm, avec un angle de fuite $\alpha = 45°$ vers le haut à droite et un coefficient de réduction $k = 0{,}5$.

1. Rappeler les trois propriétés fondamentales conservées par la perspective cavalière (faces frontales, parallélisme, milieux).
2. Quelle longueur exacte doit-on mesurer sur le papier pour tracer les arêtes fuyantes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$?
3. En supposant la face frontale $ABCD$ devant et le point de vue légèrement au-dessus et à droite, quelles sont les 3 **arêtes cachées** à tracer en pointillés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Perspective cavalière d'une pyramide régulière : On veut représenter en perspective cavalière une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de côté 4 cm et de hauteur $SO = 5$ cm (O étant le centre du carré $ABCD$), avec $\alpha = 30°$ et $k = 0{,}5$.

1. Quelle figure géométrique représente la base carrée $ABCD$ sur le dessin en perspective cavalière ?
2. Expliquer comment placer exactement le pied O de la hauteur sur le dessin, puis le sommet S.
3. En supposant la face SAB orientée vers l'avant et le point de vue au-dessus et à droite, quelles arêtes sont cachées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Les 5 solides de Platon et la relation d'Euler : Un polyèdre est dit *régulier (solide de Platon)* si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques et si chaque sommet appartient au même nombre de faces.

1. Compléter le tableau suivant des 5 solides de Platon et vérifier pour chacun la **relation d'Euler** ($S - A + F = 2$, où S = sommets, A = arêtes, F = faces) :

Solide de Platon	Forme des faces	F	S	A
Tétraèdre régulier	Triangle équilatéral	4	?	6
Cube (hexaèdre)	Carré	6	8	?
Octaèdre régulier	Triangle équilatéral	8	?	12
Dodécaèdre régulier	Pentagone régulier	12	20	?
Icosaèdre régulier	Triangle équilatéral	20	?	30

2. Quel solide est le **dual** du cube (obtenu en reliant les centres de ses 6 faces) ? Et le dual du dodécaèdre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Preuve qu'il n'existe que 5 solides de Platon : Pour former un sommet solide convexe en 3D, il faut réunir au moins $k \geq 3$ **faces** autour d'un sommet, et la **somme des angles** des faces autour de ce sommet doit être **strictement inférieure à** 360° (à 360°, les faces s'aplatiraient dans un plan).

1. Tester les faces en **triangles équilatéraux** ($\alpha_3 = 60°$) : quelles valeurs de $k \geq 3$ vérifient $k \times 60° < 360°$? À quels solides de Platon correspondent-elles ?
2. Tester les **carrés** ($\alpha_4 = 90°$), les **pentagones réguliers** ($\alpha_5 = 108°$) et les **hexagones réguliers** ($\alpha_6 = 120°$). Pourquoi est-il impossible de construire un solide de Platon avec des hexagones ou plus ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Patrons du cube : Un cube possède exactement 11 **patrons distincts** (à rotation et symétrie près) composés de 6 carrés collés bord à bord.

1. Parmi les dispositions suivantes sur quadrillage, indiquer celles qui **forment un cube** après pliage et celles qui **échouent** (en précisant pourquoi) :
   - **(P1)** 4 carrés en ligne horizontale, avec 1 carré au-dessus du 2e et 1 carré au-dessous du 3e (patron en « T / croix »).
   - **(P2)** 6 carrés disposés en 2 rangées de 3 (un rectangle 3×2).
   - **(P3)** 5 carrés en ligne horizontale et 1 carré au-dessus du 3e.
   - **(P4)** 3 carrés en ligne (colonne 1 à 3 sur la ligne 1), puis 3 carrés décalés (colonne 3 à 5 sur la ligne 2 : forme en « escalier »).
2. Sur un dé cubique classique (patron en croix P1 : colonne centrale de 4 faces de haut en bas portant $1, 2, 3, 4$, face gauche portant 5 et face droite portant 6 à côté du 2), la somme de deux faces opposées vaut-elle 7 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Patrons de l'octaèdre et du tétraèdre réguliers :

1. Un **tétraèdre régulier** est formé de 4 triangles équilatéraux. Quels sont ses 2 **seuls patrons possibles** (en reliant 4 triangles équilatéraux bord à bord) ?
2. Un **octaèdre régulier** possède 8 faces triangulaires équilatérales. Expliquer comment vérifier qu'un patron candidat composé de 8 triangles équilatéraux est valide, et dessiner mentalement le patron simple en « bande alternée » (6 triangles en bande alternée haut/bas + 1 triangle en haut et 1 en bas). Quel est son périmètre si chaque arête mesure 4 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Le ballon de football (icosaèdre tronqué — solide d'Archimède) : Un ballon de football classique est un **icosaèdre tronqué**, obtenu en coupant les 12 sommets d'un icosaèdre régulier (qui avait 20 faces triangulaires, 30 arêtes et 12 sommets) au tiers de chaque arête.

1. Quelle est la forme des 12 nouvelles faces créées à la place des 12 sommets coupés ? Et quelle nouvelle forme prennent les 20 anciennes faces triangulaires ?
2. Calculer le nombre total de faces F, d'arêtes A et de sommets S du ballon de football, puis vérifier la relation d'Euler $S - A + F = 2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Prismes et pyramides — Relations générales : On considère un prisme droit et une pyramide ayant tous deux pour base un polygone convexe à n **côtés** ($n \geq 3$).

1. Exprimer en fonction de n le nombre de faces F, de sommets S et d'arêtes A :
   - du prisme à base n-gonale ;
   - de la pyramide à base n-gonale.
2. Vérifier la formule d'Euler $S - A + F = 2$ dans les deux cas.
3. Quel prisme ou quelle pyramide possède exactement 18 **arêtes** ? Combien a-t-il alors de sommets et de faces ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Volume et perspective d'un prisme tronqué / tétraèdre dans le cube : On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 6$ cm (face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$ avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.).

On découpe le « coin » formé par la pyramide triangulaire (tétraèdre) $BEFG$ de sommet B et de base EFG.

1. Quelle est la nature exacte des 4 faces du tétraèdre $BEFG$? (Justifier sans calcul compliqué.)
2. Calculer le **volume** de ce tétraèdre $BEFG$ (en prenant EFG pour base et $[BF]$ pour hauteur), puis le volume du solide restant.
3. Quelle fraction du cube représente ce coin coupé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de géométrie dans l'espace (fourmi sur un cube) : Une fourmi se déplace sur les faces extérieures d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 10$ cm (base $ABCD$ au sol, $EFGH$ au plafond avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D).

Elle part du sommet A (sol, avant-gauche) pour rejoindre le sommet diamétralement opposé G (plafond, arrière-droit) en restant toujours à la surface du cube.

1. Quelle distance parcourrait-elle si elle suivait uniquement les arêtes ?
2. En **dépliant le patron** des deux faces traversées (par exemple la face avant $ABFE$ et la face droite $BCGF$, ou la face avant et le plafond $EFGH$), tracer le plus court chemin sur le patron et calculer sa **longueur exacte**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Compléter le tableau des cinq solides de Platon et vérifier la relation d'Euler $F + S - A = 2$:

Solide	F	S	A
Tétraèdre	4		6
Cube	6	8	
Octaèdre	8		12
Dodécaèdre	12	20	
Icosaèdre	20		30

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un icosaèdre régulier a 20 faces triangulaires ; en chaque sommet se rejoignent 5 faces.

1. En comptant les côtés de toutes les faces, déterminer le nombre d'arêtes.
2. En comptant les coins de toutes les faces, déterminer le nombre de sommets.
3. Faire de même pour le dodécaèdre (12 faces pentagonales, 3 faces par sommet).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On tronque un cube en coupant chacun de ses 8 coins (cube tronqué) : chaque coin coupé devient un triangle et chaque face carrée devient un octogone.

1. Combien le solide a-t-il de faces ?
2. Combien a-t-il de sommets ? (Chaque coin coupé crée 3 nouveaux sommets.)
3. En déduire le nombre d'arêtes par la relation d'Euler, puis vérifier par un autre calcul.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On dessine un cube de 4 cm d'arête en perspective cavalière (fuyantes inclinées à 45°, coefficient de réduction 0,5).

1. Quelles arêtes sont dessinées en vraie grandeur ? Quelle est la longueur des arêtes fuyantes sur le dessin ?
2. Les angles droits de la face avant apparaissent-ils comme des angles droits ? Et ceux des faces latérales ?
3. Deux arêtes parallèles du cube restent-elles parallèles sur le dessin ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un cube a une arête de 6 cm.

1. Calculer la longueur d'une diagonale d'une face (valeur exacte et au centième).
2. Calculer la longueur d'une grande diagonale du cube (reliant deux sommets opposés).
3. Pour un cube d'arête a, exprimer ces deux longueurs en fonction de a.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm (face inférieure $ABCD$, E au-dessus de A), on considère la pyramide $EABD$.

1. Quelle est la nature de sa base ABD ? Calculer son aire.
2. Calculer le volume de la pyramide ($V = \frac{1}{3} \times$ base $\times$ hauteur).
3. Quelle fraction du volume du cube représente-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On construit le **dual** d'un polyèdre en plaçant un point au centre de chaque face, puis en reliant les centres de deux faces voisines.

1. Quel solide obtient-on à partir d'un cube ? Justifier en comptant ses sommets et ses faces.
2. Quel est le dual d'un tétraèdre régulier ?
3. Que deviennent les nombres F, S et A quand on passe d'un solide à son dual ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Une fourmi se trouve sur un sommet d'un cube d'arête 1 m et veut atteindre le sommet opposé en marchant sur la surface.

1. Quelle distance parcourt-elle en suivant les arêtes ?
2. En dépliant deux faces voisines dans un même plan, déterminer le plus court chemin (valeur exacte et au centimètre).
3. Pourquoi le chemin le plus court ne passe-t-il pas par la grande diagonale du cube ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un assemblage de cubes identiques posé sur une grille 2×2 a les trois vues suivantes :

- vue de dessus : un carré 2×2 entièrement rempli ;
- vue de face : un carré 2×2 entièrement rempli ;
- vue de côté : un carré 2×2 entièrement rempli.

1. Quel est le nombre maximal de cubes ?
2. Quel est le nombre minimal de cubes ? Décrire une disposition.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On coupe un cube d'arête a par un plan passant par trois sommets voisins d'un même sommet S (les extrémités des trois arêtes issues de S).

1. Quelle est la nature de la section ? Calculer la longueur de ses côtés.
2. Quel solide a-t-on détaché ? Calculer son volume en fonction de a.
3. Peut-on obtenir un hexagone régulier comme section d'un cube ? Si oui, comment ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un prisme à base pentagonale a combien de faces, sommets et arêtes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un octaèdre est formé de deux pyramides à base carrée accolées par leur base. Combien de faces externes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un solide convexe a 8 sommets et 12 arêtes. Calcule le nombre de faces avec la relation d'Euler.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une arête fuyante mesure 9 cm et le coefficient de fuite est 2/3. Quelle longueur tracer en perspective cavalière ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Dans une perspective cavalière, comment représenter deux arêtes parallèles de profondeur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien d'arêtes du tétraèdre relient un sommet choisi aux trois autres ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un polyèdre convexe a 6 faces triangulaires. Combien d'arêtes compte-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Dans un dessin de pavé, quelle convention distingue les arêtes cachées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Le dessin en perspective cavalière donne 4 cm pour une arête fuyante avec coefficient 1/2. Retrouve la profondeur réelle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un tétraèdre a quatre faces. Pourquoi un cylindre ne rentre-t-il pas dans la même famille de solides ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site