Pi et le cercle — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

Méthode d'Archimède — Encadrement à l'ordre 1 (carrés et hexagones) :

On considère un cercle de diamètre $D = 1$ (donc de rayon $R = \frac{1}{2}$), dont la circonférence vaut exactement $\pi \times D = \pi$.

1. En inscrivant un **carré** à l'intérieur du cercle et en circonscrivant un **carré** à l'extérieur du cercle, établir un premier encadrement de π (avec $\sqrt{2} \approx 1{,}414$).
2. Faire de même avec un **hexagone régulier inscrit** dans le cercle de rayon $R = \frac{1}{2}$ et un **hexagone régulier circonscrit** (en utilisant $\sqrt{3} \approx 1{,}732$) pour obtenir le célèbre encadrement initial d'Archimède.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Méthode d'Archimède — Passage de l'hexagone (6 côtés) au dodécagone (12 côtés) :

Dans un cercle de rayon $R = 1$ (circonférence 2π), si un polygone régulier inscrit à n côtés a pour côté s_n, le doublement du nombre de côtés ($2n$) donne un côté de longueur :

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

1. Sachant que pour l'hexagone ($n = 6$), $s_6 = 1$, calculer la valeur exacte de s_{12}, puis sa valeur approchée (avec $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$).
2. En déduire le demi-périmètre $b_{12} = 6 \cdot s_{12}$ du dodécagone inscrit (qui donne une borne inférieure de π).
3. Pour le dodécagone circonscrit de demi-périmètre a_{12}, Archimède utilise la moyenne harmonique de $a_6 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46410$ et $b_6 = 3$:
$$a_{12} = \frac{2 \cdot a_6 \cdot b_6}{a_6 + b_6}$$
Calculer a_{12} et donner l'encadrement de π obtenu à l'ordre 12.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

L'encadrement d'Archimède à 96 côtés :

Vers 250 av. J.-C., Archimède démontra que la valeur exacte de π est encadrée par deux fractions :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

1. Écrire ces deux bornes sous forme de fractions simples $\frac{p}{q}$, puis calculer leurs valeurs décimales à 10^{-5} près.
2. Comparer ces deux bornes à la valeur $\pi \approx 3{,}14159265$: combien de décimales exactes fournit déjà cet encadrement ?
3. Quelle erreur absolue commet-on lorsqu'on remplace π par la valeur courante $\frac{22}{7}$ pour calculer la circonférence de la Terre (rayon $R = 6\,371$ km) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Fractions continues de π : Le développement en fraction continue simple de π débute par :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

que l'on note $[3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$.

1. Calculer sous forme de fraction irréductible les quatre premières réduites :
   - $c_0 = 3$
   - $c_1 = [3; 7]$
   - $c_2 = [3; 7, 15]$
   - $c_3 = [3; 7, 15, 1]$
2. Vérifier la précision exceptionnelle de la fraction c_3 (découverte par le mathématicien chinois Zu Chongzhi au Ve siècle) par rapport à $\pi \approx 3{,}1415926535$. Pourquoi cette réduite est-elle si précise ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Comment retrouver la fraction continue d'un nombre réel ? Pour obtenir le développement en fraction continue d'un nombre x, on répète l'algorithme suivant :

- prendre la partie entière $a_k = \lfloor x_k \rfloor$;
- si le reste $r_k = x_k - a_k$ est non nul, poser $x_{k+1} = \frac{1}{r_k}$ et recommencer.

1. Appliquer cet algorithme à la valeur approchée $\pi \approx 3{,}14159265$ pour retrouver les trois premiers entiers $[a_0; a_1, a_2]$ (et vérifier qu'on trouve bien $3, 7, 15$).
2. En déduire le développement en fraction continue exact de la fraction rationnelle $\frac{43}{30}$ (remarquer le lien avec l'algorithme d'Euclide !).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le paradoxe de la corde autour de la Terre :

1. On imagine une corde tendue exactement le long de l'équateur terrestre (cercle de rayon $R_T = 6\,371$ km). On allonge cette corde de 1 **mètre** et on la soulève uniformément tout autour de la Terre pour former un nouveau cercle concentrique. De quelle hauteur h (en cm) la corde s'élève-t-elle au-dessus du sol ? Un chat pourrait-il passer dessous ?
2. Quelle serait cette même hauteur h si l'on faisait l'expérience avec une balle de tennis (rayon $r = 3{,}3$ cm) au lieu de la Terre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Les lunules d'Hippocrate de Chios : Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

On trace à l'extérieur du triangle les deux demi-disques de diamètres $[AB]$ et $[AC]$, et du même côté que A le demi-disque de diamètre l'hypoténuse $[BC]$. Les deux croissants formés à l'extérieur du grand demi-disque sont appelés **lunules**.

1. Calculer la longueur de l'hypoténuse BC.
2. Calculer (en fonction de π) les aires des trois demi-disques construits sur $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
3. En déduire l'**aire totale des deux lunules** (somme des deux petits demi-disques plus le triangle ABC, moins le grand demi-disque). Que remarque-t-on vis-à-vis de π ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Estimer π expérimentalement (Monte-Carlo et pesée) :

1. On inscrit un disque de rayon $R = 1$ dans un carré de côté 2. Si l'on tire un point au hasard uniformément dans le carré, quelle est la probabilité théorique p qu'il tombe dans le disque ?
2. Lors d'une simulation de $N = 10\,000$ tirs aléatoires, $7\,852$ **points** tombent dans le disque. En déduire une estimation de π.

3. *Méthode expérimentale par pesée :* Dans une plaque de carton homogène d'épaisseur constante, on découpe un carré de 20 cm de côté (masse mesurée : $m_{\text{carré}} = 80{,}0$ g) et un disque de diamètre 20 cm (masse mesurée : $m_{\text{disque}} = 62{,}8$ g). En déduire une estimation expérimentale de π.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Couronnes circulaires et secteurs :

1. Une cible est formée de deux cercles concentriques de rayons $r = 6$ cm et $R = 10$ cm. Calculer l'aire exacte (en fonction de π) et approchée de l'anneau (couronne circulaire) compris entre les deux cercles.
2. Un essuie-glace de longueur $L = 45$ cm pivote d'un angle de $120°$. La lame en caoutchouc nettoie la zone comprise entre 15 cm et 45 cm du pivot. Calculer l'aire exacte de pare-brise nettoyée en un passage.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Comparaison de formules et approximations historiques de π :

1. Les anciens Égyptiens (papyrus Rhind) utilisaient l'approximation $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$. Calculer cette valeur au millième près et l'erreur relative par rapport à $\pi \approx 3{,}1416$.
2. La **série de Madhava–Leibniz** relie π aux inverses des entiers impairs :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

   Calculer l'approximation de π donnée par les 5 premiers termes de cette somme. Converge-t-elle vite ?
3. Le **problème de Bâle** (résolu par Leonhard Euler en 1735) donne $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ Calculer l'approximation de π obtenue en additionnant les 4 premiers termes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Une roue de vélo a un diamètre de 70 cm.

1. Quelle distance parcourt le vélo lorsque la roue fait un tour (au millimètre près) ?
2. Combien de tours fait la roue sur un trajet de 1 km ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Ératosthène (IIIe siècle av. J.-C.) a mesuré la Terre : à midi le jour du solstice, le Soleil était à la verticale de Syène, tandis qu'à Alexandrie, 800 km plus au nord, les rayons faisaient un angle de $7{,}2°$ avec la verticale.

1. Quelle fraction du tour complet ($360°$) représente $7{,}2°$?
2. En déduire la circonférence de la Terre.
3. En déduire son rayon (au km près).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On utilise souvent les fractions $\frac{22}{7}$ (Archimède) et $\frac{355}{113}$ (Zu Chongzhi, Ve siècle) pour approcher $\pi \approx 3{,}14159265$.

1. Donner l'écriture décimale de ces fractions (à 10^{-8} près).
2. Calculer l'erreur commise dans chaque cas.
3. Laquelle est la meilleure approximation ? Combien de décimales exactes donne-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Dans un disque de rayon 10 cm, on découpe un secteur d'angle 72°.

1. Quelle fraction du disque représente ce secteur ?
2. Calculer son aire et la longueur de son arc (valeurs exactes et arrondis au dixième).
3. Calculer le périmètre total du secteur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une piste d'athlétisme est formée de deux lignes droites de 84,39 m et de deux demi-cercles. Au bord intérieur, le rayon des virages est de 36,5 m.

1. Calculer la longueur d'un tour au bord intérieur (au dixième).
2. Le couloir 8 est situé 8,54 m plus à l'extérieur. De combien de mètres un tour y est-il plus long ?
3. Pourquoi les départs du 400 m sont-ils décalés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Une pizzeria propose une grande pizza de 40 cm de diamètre ou deux pizzas moyennes de 28 cm de diamètre, pour le même prix.

1. Calculer la surface de pizza dans chaque cas (au cm^2 près).
2. Quelle offre est la plus avantageuse ?
3. Quel devrait être le diamètre des deux petites pizzas pour avoir autant de surface que la grande ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Leibniz a découvert la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

1. Calculer $4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)$ (au millième).
2. Cette approximation est-elle bonne ? Que dire de la vitesse de convergence ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La circonférence de la Terre à l'équateur vaut environ 40 000 km, et la Terre fait un tour sur elle-même en 24 heures.

1. À quelle vitesse (en km/h) se déplace une personne située sur l'équateur ?
2. À la latitude de la Suisse, le cercle parcouru a un rayon d'environ 4 400 km. Calculer la vitesse correspondante.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On découpe un disque de rayon r en un très grand nombre de secteurs identiques, que l'on dispose tête-bêche côte à côte.

1. Quelle figure obtient-on approximativement ?
2. Quelles sont ses dimensions ?
3. En déduire la formule de l'aire du disque.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une ficelle de 1 m de long sert à délimiter une figure fermée.

1. Quelle est l'aire si la ficelle forme un carré ?
2. Quelle est l'aire si elle forme un cercle (au cm^2 près) ?
3. Quelle forme donne la plus grande aire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un bord circulaire de diamètre 23 cm est entouré d'un ruban. Quelle longueur exacte de ruban fait un tour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un disque a une circonférence de 18π cm. Donne son aire exacte.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Trouve la longueur de l'arc d'un secteur de 135° dans un cercle de rayon 8 cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une piste circulaire a un rayon de 30 m. À 1 m à l'extérieur, combien mesure le tour de plus ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un secteur de 120° d'un disque de rayon 6 cm représente quelle aire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On double le rayon d'un cercle. Comment changent circonférence et aire du disque ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une couronne a un rayon intérieur de 3 cm et extérieur de 8 cm. Calcule son aire exacte.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

La circonférence mesurée est 31,5 cm et le diamètre mesuré 10,0 cm. Quelle estimation de π en déduis-tu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de rayon 1. Chacun de ses côtés vaut $\sqrt{3}$. Que donne son périmètre comme borne sur π ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Donne le périmètre d'un quart de disque de rayon 10 cm, rayons du secteur inclus.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site