Nombre d'or — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

Définition du nombre d'or Φ et du rectangle d'or : Un segment de longueur totale $a+b$ (avec $a > b > 0$) est partagé en « extrême et moyenne raison » lorsque le rapport du tout à la grande partie est égal au rapport de la grande partie à la petite :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

1. En posant $\Phi = \frac{a}{b}$, montrer que Φ est solution de l'équation du second degré : $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.
2. Vérifier par le calcul que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$ est bien la solution positive de cette équation.
3. Un rectangle d'or a pour largeur $\ell = 10$ cm. Quelle doit être sa longueur L ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Propriété géométrique du rectangle d'or et spirale d'or :

1. Un rectangle d'or a pour longueur $L = \Phi$ et pour largeur $\ell = 1$. On découpe à l'intérieur un **carré de côté** 1 (donc de côté égal à la largeur). Calculer les dimensions du **petit rectangle restant**, puis démontrer que le petit rectangle restant est **lui aussi un rectangle d'or** (même rapport longueur/largeur $= \Phi$).
2. En répétant indéfiniment ce découpage de carrés, on obtient une suite de carrés dont on relie les coins par des quarts de cercle (spirale d'or). Si le grand rectangle d'or initial a pour largeur 10 cm, quelle est l'aire du 3$^{\text{e}}$ carré découpé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Calculs algébriques sur Φ : Sachant que $\Phi^2 = \Phi + 1$ (sans remplacer Φ par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ avant la fin) :

1. Exprimer Φ^3, Φ^4 et Φ^5 sous la forme linéaire $a\Phi + b$ (où $a, b \in \mathbb{N}$).
2. Exprimer $\frac{1}{\Phi}$ et $\frac{1}{\Phi^2}$ sous la forme $c\Phi + d$ (où $c, d \in \mathbb{Z}$).
3. Quelle célèbre suite numérique reconnaît-on dans les coefficients a et b des puissances $\Phi^n = a_n\Phi + b_n$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Construction du rectangle d'or au compas :

On trace un carré $ABCD$ de côté 1 dm (10 cm). On place le milieu M du côté inférieur $[AB]$, puis on trace l'arc de cercle de centre M et de rayon MC, qui coupe la demi-droite $[AB)$ en un point E. On complète le rectangle $AEFD$.

1. Calculer par le théorème de Pythagore la longueur exacte MC (en dm).
2. En déduire la longueur AE du rectangle $AEFD$ et montrer que $AEFD$ est exactement un **rectangle d'or**.
3. Montrer également que le rectangle ajouté $BEFC$ est un rectangle d'or.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Le triangle d'or et le pentagone régulier : On considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que l'angle au sommet mesure $\widehat{A} = 36^\circ$ et les côtés égaux mesurent $AB = AC = 1$ (on le nomme *triangle d'or*).

1. Calculer les mesures des angles à la base $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
2. On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$, qui coupe $[AC]$ en D. Calculer tous les angles des deux sous-triangles ABD et BCD. Que constate-t-on pour chacun d'eux ?

3. En utilisant la similitude des triangles ABC et BCD, poser $x = BC$ et démontrer que $x = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\text{grand côté}}{\text{base}}$ du triangle d'or vaut exactement Φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le pentagone régulier et le pentagramme : Soit $ABCDE$ un pentagone régulier convexe de côté $c = 10$ cm.

1. Calculer la mesure de l'angle intérieur $\widehat{ABC}$ du pentagone régulier.
2. En traçant la diagonale $[AC]$, montrer que le triangle ACD (formé par les deux diagonales $[AC]$, $[AD]$ et le côté $[CD]$) est un **triangle d'or** ($36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$).
3. En déduire la longueur exacte d'une **diagonale** du pentagone régulier, et calculer le rapport entre deux segments successifs d'une étoile à cinq branches (pentagramme) inscrite dans ce pentagone.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Suite de Fibonacci et convergence vers Φ : La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

1. Calculer les 12 premiers termes de la suite : $F_1, F_2, \ldots, F_{12}$.
2. Calculer les rapports successifs $q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ (arrondir à 10^{-5} près) et observer comment ils encadrent $\Phi \approx 1{,}618034$.
3. En supposant que $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers une limite positive L lorsque n devient très grand, passer à la limite dans $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$ pour prouver que $L = \Phi$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Identité de Cassini et paradoxe du carré découpé :

1. Calculer la quantité $C_n = F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2$ pour $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Quelle conjecture (appelée *identité de Cassini*) formule-t-on ?
2. *Application :* On découpe un carré de côté $8 = F_6$ (aire 64) en quatre pièces (deux triangles de 3×8 et deux trapèzes de bases $3, 5$ et hauteur 5), puis on les réassemble en un rectangle de dimensions $5 \times 13 = F_5 \times F_7 = 65$. Expliquer en une phrase le lien entre ce gain apparent de 1 cm^2 et l'identité de Cassini !

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Fraction continue et radical infini de Φ :

1. À l'aide de l'équation $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, montrer que le nombre d'or s'écrit comme la fraction continue la plus simple possible : $[1; 1, 1, 1, \ldots]$. Expliquer pourquoi on le qualifie parfois de « nombre le plus irrationnel ».
2. On considère le radical emboîté infini :

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

En remarquant que l'expression sous la première racine vaut $1 + x$, montrer que $x = \Phi$. Calculer les 3 premières approximations $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$ et $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (escalier / lapins / formule de Binet) :

1. Un élève monte un escalier de n marches en montant à chaque pas soit 1 **marche**, soit 2 **marches**. Notons u_n le nombre de façons différentes de gravir n marches.
   - Calculer directement u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
   - Expliquer pourquoi $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 3$, et en déduire u_{10}.
2. La **formule de Binet** permet de calculer directement F_n sans calculer les termes précédents :

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

   Vérifier cette formule pour $n = 1$ et $n = 2$ (sachant que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\Phi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On pose $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Donner une valeur approchée de Φ au millième.
2. Développer Φ^2 et montrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
3. En déduire que $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$, et donner une valeur approchée de $\frac{1}{\Phi}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

En utilisant uniquement la relation $\Phi^2 = \Phi + 1$, exprimer sous la forme $a\Phi + b$ (avec a et b entiers) :

1. Φ^3
2. Φ^4
3. Φ^5

Que remarque-t-on sur les coefficients ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On veut partager un segment de 10 cm en deux parties a et b ($a > b$) selon la **section dorée**, c'est-à-dire telles que $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$.

1. Calculer a et b au centième.
2. Vérifier que $\frac{a}{b} \approx 1{,}618$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On compare le rapport longueur/largeur de plusieurs rectangles du quotidien :

- une carte bancaire : 85,6 mm × 53,98 mm ;
- une feuille A4 : 297 mm × 210 mm ;
- un écran 16 : 9.

1. Calculer chaque rapport au millième.
2. Lequel est le plus proche d'un rectangle d'or ($\Phi \approx 1{,}618$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

On calcule les quotients de termes consécutifs de la suite de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$.

1. Calculer $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$ et $\frac{55}{34}$ (au dix-millième).
2. Que remarque-t-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Dans un pentagone régulier, le rapport entre une diagonale et un côté vaut Φ.

1. Un pentagone régulier a des côtés de 10 cm. Calculer la longueur d'une diagonale (au millimètre).
2. On trace les 5 diagonales : elles forment une étoile (pentagramme). Combien mesure le périmètre de l'étoile (les 5 diagonales entières) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On considère les fractions emboîtées :

$$f_1 = 1 + \frac{1}{1} \qquad f_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \qquad f_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

1. Calculer f_1, f_2, f_3 et f_4 sous forme de fractions.
2. Montrer que $f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_n}$.
3. Vers quel nombre tendent ces fractions ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La **formule de Binet** permet de calculer directement un terme de la suite de Fibonacci : pour n assez grand, F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$.

1. Calculer $\frac{\Phi^{10}}{\sqrt{5}}$ à la calculatrice et comparer à $F_{10} = 55$.
2. Utiliser la formule pour estimer F_{20}.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un architecte veut dessiner une façade en forme de rectangle d'or, de largeur 31 m (la largeur étant le grand côté).

1. Quelle doit être la hauteur (au décimètre près) ?
2. Le Parthénon d'Athènes mesure environ 30,9 m de large pour 13,7 m de haut (avec le fronton). Son rapport est-il proche de Φ ?
3. Quelle conclusion critique peut-on en tirer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On trace un carré de côté 1, puis on ajoute un carré de côté 1 contre lui, puis un carré de côté 2 contre le rectangle obtenu, puis un carré de côté 3, puis 5, etc., en tournant.

1. Quelles sont les dimensions des rectangles successifs obtenus ?
2. Quelle est l'aire du rectangle après avoir placé les carrés de côtés $1, 1, 2, 3, 5, 8$? En déduire une formule pour $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$.
3. Que trace-t-on en reliant par des quarts de cercle les coins opposés de chaque carré ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On pose $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. Encadre φ entre deux dixièmes consécutifs (utilise $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}4$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Pourquoi l'autre racine de $x^2 - x - 1 = 0$ est-elle écartée pour un rapport de longueurs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Sachant que $\phi^2 = \phi + 1$, exprime $1/\phi$ à l'aide de φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Sachant que $\phi^2 = \phi + 1$, réduis ϕ^3 à une expression affine en φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un rectangle d'or a une largeur de 8 cm. Estime sa longueur au dixième ($\varphi \approx 1{,}618$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un rectangle de 21×13 cm a-t-il un rapport exactement égal à φ ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Dans la suite 2, 3, 5, 8, 13, … où chaque terme est la somme des deux précédents, donne les deux suivants.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un partage d'or a une grande longueur a et une petite longueur b, avec $a/b = \varphi$. Exprime $(a+b)/b$ à l'aide de φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un rectangle a pour côtés φ et 1. Après le retrait d'un carré de côté 1, quel est le rapport grand côté/petit côté du rectangle restant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un segment de 30 cm est partagé avec le rapport grand morceau/petit morceau égal à 1,618. Donne la longueur du petit morceau au dixième.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site