Irrationalité et racine carrée de deux — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

Classification des ensembles de nombres : On rappelle les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels, nombres réels).

Pour chacun des nombres suivants, indiquer le **plus petit ensemble** auquel il appartient :

$$a = -\frac{12}{3} \quad ; \quad b = \frac{7}{20} \quad ; \quad c = \frac{5}{6} \quad ; \quad d = \sqrt{49} \quad ; \quad e = \sqrt{8} \quad ; \quad f = 0{,}123123123\ldots$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Preuve de non-décimalité : Un nombre rationnel écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est un **nombre décimal** ($\in \mathbb{D}$) si et seulement si q ne possède que 2 et 5 comme facteurs premiers.

1. Sans effectuer la division, déterminer lesquelles des fractions suivantes représentent des nombres décimaux (après simplification) :
$$\frac{21}{28} \quad ; \quad \frac{9}{15} \quad ; \quad \frac{14}{35} \quad ; \quad \frac{15}{22}$$
2. Montrer par un argument portant sur le dernier chiffre qu'il n'existe **aucun nombre décimal** d tel que $d^2 = 2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Preuve célèbre d'irrationalité de $\sqrt{2}$ (raisonnement par l'absurde) :

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrive sous forme de **fraction irréductible** $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGDC}(p; q) = 1$.

1. Élever au carré pour obtenir $p^2 = 2q^2$, et en déduire que p **est pair** (justifier pourquoi un entier impair a toujours un carré impair).
2. En écrivant $p = 2k$, montrer ensuite que q **est également pair**.
3. Expliquer en quoi cela fournit une contradiction et conclure.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Preuve d'irrationalité de $\sqrt{3}$ et stabilité de $\mathbb{Q}$:

1. Adapter la démonstration précédente pour prouver que $\sqrt{3}$ **est irrationnel** *(indice : utiliser le reste modulo 3 d'un entier n pour montrer que si 3 divise n^2, alors 3 divise n).*
2. Sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, montrer par l'absurde que $x = 1 + 3\sqrt{2}$ est également irrationnel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Piège sur la somme et le produit d'irrationnels : Les affirmations suivantes sont-elles **vraies ou fausses** ? Si une affirmation est fausse, donner un contre-exemple simple.

1. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est toujours irrationnelle.
2. La somme de deux nombres irrationnels est toujours irrationnelle.
3. Le produit de deux nombres irrationnels est toujours irrationnel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le format de papier A4 et $\sqrt{2}$: Les feuilles de papier standard (A0, A1, A2, A3, A4, A5…) sont conçues de sorte que lorsqu'on **coupe une feuille en deux** dans le sens de sa plus grande dimension (sa longueur L), la demi-feuille obtenue (de dimensions ℓ et $L/2$) garde **exactement les mêmes proportions** que la feuille initiale.

1. Écrire l'égalité de proportion entre $\frac{L}{\ell}$ et le format de la demi-feuille, puis démontrer que $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.
2. Sachant qu'une feuille **A0** a une aire exacte de 1 $\mathbf{m}^2$ ($L_0 \times \ell_0 = 1$), calculer les dimensions L_0 et ℓ_0 d'une feuille A0, puis celles d'une feuille **A4** (obtenue en pliant 4 fois en deux, arrondies au millimètre près, avec $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Construction géométrique à la règle et au compas — Escargot de Pythagore (spirale de Théodore) :

On part d'un triangle rectangle isocèle OA_0A_1 rectangle en A_0, avec $OA_0 = A_0A_1 = 1$ cm. À chaque étape $k \geq 1$, on construit extérieurement un nouveau triangle rectangle OA_kA_{k+1} rectangle en A_k, avec $A_kA_{k+1} = 1$ cm.

1. Calculer les longueurs exactes OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 et OA_n en fonction de n.
2. Comment utiliser cette construction et un compas pour placer exactement $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ sur une droite graduée d'origine O ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Construction géométrique de $\sqrt{a}$ en une seule étape (méthode d'Euclide par le demi-cercle) :

Sur une droite, on place trois points alignés dans cet ordre : A, H et B tels que $AH = a$ et $HB = 1$ (avec $a > 0$, en cm). On trace le **demi-cercle de diamètre** $[AB]$, puis la perpendiculaire à (AB) passant par H, qui coupe le demi-cercle en C.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. En exprimant AC^2 et BC^2 dans les triangles rectangles AHC et BHC, puis en utilisant le théorème de Pythagore dans ABC, démontrer que $CH = \sqrt{a}$.
3. Quelle longueur faut-il prendre pour AH et HB si l'on veut construire $\sqrt{6}$ en un seul tracé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Encadrement et algorithme d'Héron d'Alexandrie pour $\sqrt{2}$:

1. Expliquer pourquoi $\sqrt{2}$ vérifie $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, puis $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ (sans touche $\sqrt{\ }$).
2. Pour approcher $\sqrt{2}$ très rapidement, Héron construit une suite de rectangles d'aire 2 en remplaçant à chaque étape la dimension x_n par la **moyenne arithmétique** de x_n et $\frac{2}{x_n}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

   En partant de $x_0 = 1$, calculer sous forme de **fractions irréductibles** les trois termes suivants x_1, x_2 et x_3, puis comparer x_3 à $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Fraction continue de $\sqrt{2}$ et racines emboîtées :

1. Vérifier que $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, puis en déduire que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$.

2. En remplaçant indéfiniment $(\sqrt{2}-1)$ au dénominateur, on obtient la fraction continue infinie $[1;2,2,2,\dots]$. Calculer les quatre premières réduites :

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = 1 + \frac{1}{2} \quad ; \quad r_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \quad ; \quad r_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

3. Comparer r_0, r_1, r_2, r_3 à $\sqrt{2}$: comment s'approchent-elles de $\sqrt{2}$ (par excès ou par défaut) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

$$\sqrt{16}\ ;\ \sqrt{8}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ -7\ ;\ 0{,}25\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{\frac{9}{4}}\ ;\ -\frac{12}{4}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Simplifier les expressions suivantes (sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible) :

1. $\sqrt{50}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt{18} + \sqrt{8}$
4. $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

1. Sans calculatrice, montrer que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
2. Encadrer $\sqrt{2}$ au millième près en calculant $1{,}414^2$ et $1{,}415^2$.
3. Pourquoi ne pourra-t-on jamais écrire $\sqrt{2}$ avec un nombre fini de décimales ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

1. Calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 5 cm (valeur exacte puis approchée au centième).
2. Quel est le côté d'un carré d'aire 2 m^2 ?
3. Un triangle rectangle isocèle a une hypoténuse de 10 cm. Calculer la longueur de ses côtés de l'angle droit.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Rendre rationnel le dénominateur (écrire sans racine au dénominateur) :

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{10}{\sqrt{5}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (multiplier par $\sqrt{2}+1$)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

1. Écrire $x = 0{,}272727\ldots$ sous forme de fraction irréductible (calculer $100x - x$).
2. Même question pour $y = 0{,}999\ldots$ Que remarque-t-on ?
3. Pourquoi tout nombre dont l'écriture décimale est périodique est-il rationnel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Démontrer par l'absurde que $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Démontrer de même que $3\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Le produit de deux irrationnels est-il toujours irrationnel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Algorithme de Héron : pour approcher $\sqrt{2}$, on part de $x_0 = 1$ et on calcule $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.

1. Calculer x_1, x_2 et x_3 (fractions puis valeurs décimales).
2. Comparer x_3 avec $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$.
3. Expliquer l'idée : pourquoi la moyenne de x et $\frac{2}{x}$ est-elle une meilleure approximation ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Dans un triangle rectangle, calculer l'hypoténuse (valeur exacte) lorsque les côtés de l'angle droit mesurent :

1. 1 et 1
2. 1 et 2
3. 2 et 3
4. Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{5}$ dans un quadrillage. Comment s'y prendre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On considère les nombres :

- $a = 0{,}1212121212\ldots$ (le bloc « 12 » se répète)
- $b = 0{,}1010010001000010\ldots$ (on ajoute un zéro de plus entre chaque 1)

1. a est-il rationnel ? Si oui, l'écrire sous forme de fraction.
2. b est-il rationnel ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Entre quels centièmes consécutifs se trouve $\sqrt{2}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Le décimal 1,414 est-il exactement égal à $\sqrt{2}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Justifie que si le carré d'un entier est pair, l'entier est pair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Suppose $\sqrt{2} = p/q$ avec des entiers p et q premiers entre eux et q > 0. Quelle contradiction obtient-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un carré a des côtés de 7 cm. Sa diagonale peut-elle avoir une longueur rationnelle en centimètres ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

La somme $3 + \sqrt{2}$ est-elle rationnelle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Donne deux irrationnels dont le produit est rationnel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Trouve un irrationnel strictement compris entre 2 et 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Le nombre 0,121212… avec répétition de 12 est-il rationnel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Donne l'inverse de $\sqrt{2}$ sous une forme sans racine au dénominateur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site