Fractales — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

Courbe de von Koch (longueur d'un seul côté) : On part à l'étape 0 d'un segment de longueur $L_0 = 1$ m. À chaque étape, on divise chaque segment en 3 tiers égaux et l'on remplace le tiers central par les deux autres côtés d'un triangle équilatéral pointant vers l'extérieur (on passe donc de 1 segment à 4 segments 3 fois plus courts).

1. Calculer le nombre de segments N_n, la longueur ℓ_n d'un segment et la longueur totale L_n de la ligne brisée pour $n = 0, 1, 2, 3$.
2. Exprimer L_n en fonction de n, et expliquer ce qui arrive à la longueur L_n lorsque n tend vers l'infini.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Le flocon de von Koch — Périmètre infini mais aire finie !

On part d'un triangle équilatéral de côté $c = 9$ cm et d'aire $\mathcal{A}_0$. On applique la transformation de von Koch simultanément à ses 3 **côtés**.

1. Quel est le périmètre P_0 à l'étape 0, puis P_1 et P_2 aux étapes 1 et 2 ? Donner la formule de P_n.
2. En exprimant l'aire de chaque petit triangle ajouté à l'étape 1 (côté $\frac{1}{3}$ du côté initial, donc aire $\frac{1}{9}\mathcal{A}_0$), calculer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ en fonction de $\mathcal{A}_0$.
3. Sachant que la somme géométrique infinie $1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots$ vaut $\frac{1}{1-4/9} = \frac{9}{5}$, calculer l'**aire limite** $\mathcal{A}_\infty$ du flocon en fonction de $\mathcal{A}_0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Triangle de Sierpiński : On part d'un triangle équilatéral plein T_0 d'aire $\mathcal{A}_0 = 64$ cm^2 et de périmètre $P_0 = 24$ cm (étape 0). À chaque étape, dans chaque triangle plein restant, on relie les milieux des 3 côtés et l'on **retire** le triangle central (il reste donc 3 triangles pleins deux fois plus petits).

1. Combien de triangles pleins restent à l'étape 1, 2, 3 et à l'étape n ?
2. Calculer l'aire restante $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et la formule générale $\mathcal{A}_n$. Vers quoi tend l'aire lorsque $n \to +\infty$?
3. Calculer la somme des périmètres de tous les triangles pleins restants à l'étape 1, 2 et n. Vers quoi tend ce périmètre total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Le tapis de Sierpiński : On part d'un carré plein d'aire $\mathcal{A}_0 = 1$ m^2. À l'étape 1, on le découpe en 9 carrés identiques (3×3) et l'on retire le carré central. À l'étape 2, on répète l'opération dans chacun des 8 carrés pleins restants, et ainsi de suite.

1. Quelle fraction de l'aire initiale reste-t-il après 1 étape ? après 2 étapes ? après n étapes ?
2. Combien de trous (carrés retirés) ont été percés au total après 3 étapes ?
3. Calculer l'aire restante à l'étape 5 (en m^2, arrondie au millième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

L'ensemble de Cantor (poussière de Cantor) : On part à l'étape 0 d'un segment $[0; 1]$ de longueur $L_0 = 1$. À chaque étape, on retire le tiers central ouvert de chaque segment restant (à l'étape 1, on garde $[0; \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}; 1]$).

1. Calculer le nombre de segments et la longueur totale restante L_n aux étapes $1, 2, 3$ et n.
2. Quelle est la somme des longueurs des segments **retirés** à l'infini ?

3. Donner deux exemples de points qui ne sont **jamais retirés** (même à l'infini), et expliquer pourquoi le point $\frac{1}{4}$ reste toujours dans l'ensemble de Cantor *(indice : observer que $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$, ou son écriture en base 3).*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

L'éponge de Menger (fractale en 3D) : C'est l'analogue en 3 dimensions du tapis de Sierpiński. On part d'un cube plein de côté 1 m (volume $V_0 = 1$ m^3). À l'étape 1, on le divise en 27 petits cubes ($3 \times 3 \times 3$) et l'on retire les 6 cubes au centre des 6 faces ainsi que le 1 cube central (soit 7 **cubes retirés** sur 27).

1. Combien de petits cubes pleins restent à l'étape 1 ? Quelle fraction du volume reste-t-il ?
2. On répète l'opération sur chacun des cubes restants. Quel est le nombre de cubes pleins et le volume restant V_n à l'étape n ?
3. Montrer que l'**aire totale des surfaces** de l'éponge tend vers $+\infty$ alors que son volume tend vers 0 (à l'étape 1, calculer l'aire extérieure + intérieure des tunnels).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

L'arbre de Pythagore (fractale et théorème de Pythagore) : On part d'un carré C_0 d'aire $\mathcal{A}_0 = 1$ m^2 (étape 0). Sur son côté supérieur, on construit un triangle rectangle isocèle dont ce côté est l'hypoténuse, puis on construit deux carrés C_1 sur les deux petits côtés du triangle rectangle (étape 1), et l'on répète indéfiniment.

1. D'après le théorème de Pythagore, quelle est la **somme des aires** des deux carrés ajoutés à l'étape 1 ?
2. Quelle est l'aire totale ajoutée à l'étape 2 (les 4 nouveaux carrés) et à l'étape n (les 2^n nouveaux carrés) ?
3. Pourquoi l'aire de tous ces carrés (sans compter les éventuels chevauchements tardifs) diverge-t-elle vers $+\infty$ si l'on compte l'aire ajoutée à chaque niveau, alors que la figure reste pourtant contenue dans un rectangle fini ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Antenne fractale et dimension fractale : Pour loger une longue antenne radio dans un téléphone portable compact, on utilise une géométrie fractale (comme la courbe de von Koch ou une courbe quadratique de Koch).

Pour une courbe fractale auto-similaire constituée de N **copies** identiques de taille réduite d'un facteur r (ex. pour un segment : $N = 2$ moitiés de facteur $r = 2$; pour un carré : $N = 4$ quarts de facteur $r = 2$), on définit la **dimension fractale** D par :

$$N = r^D$$

1. Vérifier que pour un segment ($N = 3, r = 3$) on trouve $D = 1$, et pour un carré ($N = 9, r = 3$) on trouve $D = 2$.
2. Quelle relation $r^D = N$ vérifie la **courbe de von Koch** ($N = 4$ copies réduites d'un facteur $r = 3$) ? Sa dimension D est-elle comprise entre 1 et 2 ? *(Tester $D = 1$, $D = 1{,}26$ et $D = 2$ sachant que $3^{1{,}26} \approx 3{,}99$.)*
3. Quelle est la dimension fractale d'un **triangle de Sierpiński** ($N = 3$ copies réduites d'un facteur $r = 2$, avec $2^{1{,}585} \approx 3$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

La fractale du chou romanesco / spirale et carré de Koch : On considère une fractale obtenue à partir d'un carré de côté $L_0 = 8$ cm : à chaque étape, sur le tiers central de chaque côté, on construit extérieurement un **petit carré** de côté divisé par 3 (on remplace donc 1 segment par 5 **segments** de longueur $\frac{1}{3}$).

1. Quelle est la longueur totale du contour P_n aux étapes $n = 0, 1, 2$ et à l'étape n ?
2. Quelle est l'aire ajoutée à l'étape 1 et à l'étape 2 en fonction de l'aire initiale $\mathcal{A}_0 = 64$ cm^2 ?
3. L'aire totale à l'infini est-elle finie ou infinie ? *(Utiliser la formule de la somme géométrique $1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q}$ pour $|q| < 1$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Courbe du dragon (pliage d'une bande de papier) : On prend une bande de papier et on la plie en deux toujours dans le même sens :

- 1 pli : 1 pli (creux), soit 2 segments.
- 2 plis : 3 plis, soit 4 segments.
- 3 plis : 7 plis, soit 8 segments.

Lorsqu'on déplie la bande à angles droits (90° à chaque pli), on obtient les premières itérations de la *fractale du dragon*.

1. Donner la formule du nombre de segments S_n et du nombre de plis P_n après n pliages.
2. À chaque pliage, l'épaisseur totale de la bande pliée double (épaisseur initiale d'une feuille : $e_0 = 0{,}1$ mm). Quelle épaisseur atteindrait-on théoriquement après 10 pliages ? Après 42 pliages ? *(On donne* $2^{10} = 1\,024$ *et* $2^{42} \approx 4{,}4 \times 10^{12}$*.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Courbe de von Koch : à chaque étape, chaque segment est remplacé par 4 segments de longueur $\frac{1}{3}$ de l'original. On part d'un segment de 1 m.

1. Calculer la longueur de la courbe aux étapes 1, 2, 3 et 4 (au millième).
2. Exprimer la longueur L_n à l'étape n.
3. À partir de quelle étape la longueur dépasse-t-elle 10 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Triangle de Sierpiński : à chaque étape, on divise chaque triangle plein en 4 triangles égaux (en joignant les milieux des côtés) et on retire celui du centre.

1. Combien de triangles pleins y a-t-il aux étapes 1, 2, 3 ? À l'étape n ?
2. Quelle fraction de l'aire initiale reste-t-il à l'étape n ? Calculer pour $n = 5$ (au millième).
3. Que devient l'aire lorsque n devient très grand ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Ensemble de Cantor : on part du segment $[0; 1]$. À chaque étape, on retire le tiers central de chaque segment restant.

1. À l'étape 4, combien y a-t-il de segments, quelle est la longueur de chacun et la longueur totale ?
2. Quelle longueur a-t-on retirée au total après 4 étapes ?
3. Le point $\frac{1}{3}$ est-il retiré à un moment donné ? Et le point $\frac{1}{2}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On dessine un arbre fractal : un tronc de 1 m se divise en 2 branches, chacune de longueur égale à la **moitié** de la précédente ; chaque branche se divise à son tour en 2, etc.

1. Calculer la longueur totale ajoutée à chaque niveau (niveaux 1, 2, 3).
2. Quelle est la longueur totale de l'arbre après n niveaux de branches ?
3. Que se passe-t-il si chaque branche mesure 0,6 fois la précédente ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une figure fractale est formée de N copies d'elle-même réduites d'un facteur k. Sa **dimension** D vérifie $k^D = N$.

1. Vérifier la formule pour un segment (2 copies réduites de moitié), un carré (4 copies réduites de moitié) et un cube (8 copies réduites de moitié).
2. Pour la courbe de von Koch (4 copies réduites d'un facteur 3), encadrer D entre deux nombres à un dixième près en testant $3^{1,2}$ et $3^{1,3}$ à la calculatrice.
3. Faire de même pour le triangle de Sierpiński (3 copies réduites de moitié).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

L'éponge de Menger : on divise un cube en 27 petits cubes égaux et on retire le cube central ainsi que les 6 cubes au centre de chaque face. On recommence avec chaque petit cube restant.

1. Combien de petits cubes restent après l'étape 1 ? Après l'étape 3 ?
2. Quelle fraction du volume initial reste-t-il après l'étape 3 (au millième) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Fractale de Vicsek : on part d'un carré de côté 1. On le divise en 9 carrés égaux et on garde seulement les 4 carrés des coins et le carré central (on obtient une croix en X). On recommence sur chaque carré gardé.

1. Combien de carrés y a-t-il à l'étape n ? Quelle est l'aire totale ?
2. Calculer l'aire à l'étape 3 (au millième).
3. Calculer la dimension D (avec $3^D = 5$) à l'aide d'essais à la calculatrice (au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Flocon de von Koch : on part d'un triangle équilatéral de côté 9 cm et on applique la construction de von Koch sur chacun des 3 côtés.

1. Combien de côtés le flocon possède-t-il aux étapes 1, 2 et 3 ?
2. Quelle est la longueur d'un côté à l'étape 3 ?
3. Calculer le périmètre à l'étape 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On écrit les premières lignes du triangle de Pascal (chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus) et on colorie les nombres **impairs**.

1. Écrire les lignes 0 à 7.
2. Compter les nombres impairs dans chaque ligne, puis au total dans les 8 lignes.
3. Quelle figure fractale apparaît ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Le paradoxe de la côte : on mesure la longueur d'une côte rocheuse avec des « règles » de plus en plus petites.

- Avec une règle de 100 km : 1 000 km
- Avec une règle de 10 km : 1 500 km

- Avec une règle de 1 km : 2 250 km

1. Par quel nombre la longueur mesurée est-elle multipliée à chaque fois que l'on divise la règle par 10 ?
2. Prédire la mesure avec une règle de 100 m.
3. Pourquoi peut-on dire que la longueur d'une côte « n'existe pas » vraiment ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On commence par un segment, puis à chaque étape chaque segment conservé est remplacé par deux segments de longueur un tiers de la sienne. Combien reste-t-il de segments après quatre étapes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un carré unité est divisé en neuf carrés égaux. On conserve huit carrés, puis on répète le procédé dans chacun. Quelle fraction de l'aire reste après deux étapes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Dans le triangle de Sierpiński, chaque triangle conservé donne trois triangles de côté moitié. Quel est le facteur de réduction de l'aire totale par étape ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une figure est remplacée à chaque étape par quatre copies réduites. Après trois étapes, combien de copies élémentaires apparaissent si l'on part d'une seule figure ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un arbre idéal commence par une branche de 12 cm. Les branches des générations suivantes mesurent chacune la moitié de la génération précédente. Quelle longueur à la génération 4 si la branche initiale est la génération 0 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On construit une ligne brisée en remplaçant chaque segment par cinq segments d'un tiers de sa longueur. Que devient la longueur totale à chaque étape ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une construction conserve quatre carrés de côté un tiers du carré parent. Quelle aire reste après une étape à partir de 81 cm² ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Après deux étapes, un motif contient 25 copies à partir d'une seule figure. Le même nombre de copies est produit par chaque figure à chaque étape. Quel est ce nombre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Dans le jeu du chaos, on remplace le point P(8, 2) par le milieu entre P et le sommet A(2, 6). Quelle est sa nouvelle position ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une construction part d'un segment de 81 cm. Chaque étape remplace chaque segment par deux segments de longueur un tiers. Quelle est la longueur totale à l'étape 3 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site