Table des matières

Exercices corrigés de physique de 10e HarmoS **1**
Logique . . . 1
Stratégies . . . 6
Casse-têtes . . . 11
Irrationalité et racine carrée de deux . . . 16
Pi et le cercle . . . 20
Nombre d'or . . . 26
Représentations graphiques . . . 30
Fonctions au quotidien . . . 36
Recherche de fonctions . . . 41
Fractales . . . 46
Polyèdres et perspective . . . 51
Divers points de vue . . . 56
Intersections . . . 62
Mesures et incertitudes . . . 67
Lentilles convergentes . . . 72
Lentilles divergentes . . . 77
L'oeil et la vision . . . 81
Systèmes de lentilles . . . 86
Forces et équilibre . . . 91
Force d'Archimède . . . 96
Moments et équilibre . . . 101

Exercices corrigés de physique de 10e HarmoS

Logique

Exercice 1

Vous vous trouvez devant **deux portes** fermées : l'une mène au laboratoire de physique (la bonne porte) et l'autre à un cul-de-sac.

Devant chaque porte se tient un gardien. Vous savez que **l'un des deux est un Véridique** (dit toujours la vérité) et que **l'autre est un Menteur** (ment toujours), mais vous ignorez lequel est lequel.

Vous n'avez le droit de poser **qu'une seule question** à l'un des deux gardiens (au choix) pour identifier à coup sûr la bonne porte.

1. Quelle question devez-vous poser ?
2. Quelle porte devez-vous choisir selon sa réponse ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Sur l'île des Véridiques (qui disent toujours la vérité) et des Menteurs (qui mentent toujours), trois scientifiques **Alain**, **Béatrice** et **Cédric** font les déclarations suivantes :

- **Alain :** « Béatrice et Cédric sont tous les deux des Menteurs. »
- **Béatrice :** « Au moins l'un d'entre Alain et Cédric est un Véridique. »
- **Cédric :** « Alain est un Menteur ou Béatrice est une Menteuse. »

À l'aide d'une **table de vérité** (ou d'un arbre de cas), déterminer le statut exact de chacun des trois scientifiques.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Un coffre-fort électronique s'ouvre lorsque la sortie logique S vaut 1 (Vrai). Il est commandé par trois interrupteurs A, B et C (0 = ouvert, 1 = fermé) selon l'expression :

$$S = (A \text{ ET } \overline{B}) \text{ OU } (B \text{ ET } C)$$

où $\overline{B}$ désigne la négation de B ($\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$).

1. Dresser la **table de vérité complète** des 8 combinaisons de (A, B, C) en calculant A ET $\overline{B}$, B ET C, puis S.
2. Combien de combinaisons permettent d'ouvrir le coffre ($S = 1$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Lors d'une séance de travaux pratiques, quatre élèves — **Léna**, **Marc**, **Noé** et **Olive** — étudient chacun un objet différent (**aimant**, **pendule**, **prisme**, **ressort**) associé à une masse étalon différente (100 **g**, 200 **g**, 300 **g**, 400 **g**).

Indices :

1. L'aimant est associé à une masse exactement double de celle de Léna.
2. Marc travaille avec la masse la plus lourde (400 g).
3. Léna n'étudie ni le pendule, ni le ressort.
4. Le ressort est associé à une masse strictement inférieure à celle du prisme.
5. La masse utilisée par Noé est plus petite que celle utilisée par Olive.

Retrouver pour chaque élève son objet et sa masse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Sur un groupe de 40 **élèves** participant à une journée scientifique, trois ateliers sont proposés : **Optique** (O), **Mécanique** (M) et **Électricité** (E).

On relève les inscriptions suivantes :

- 19 élèves suivent l'Optique, 17 la Mécanique et 15 l'Électricité ;
- 7 suivent à la fois Optique et Mécanique ;
- 6 suivent à la fois Optique et Électricité ;
- 5 suivent à la fois Mécanique et Électricité ;
- 2 élèves courageux suivent les **trois** ateliers.

À l'aide d'un diagramme de Venn à 3 ensembles, déterminer :

1. L'effectif exact de chacune des 7 zones intérieures du diagramme.
2. Combien d'élèves ne suivent **aucun** de ces trois ateliers ?
3. Combien d'élèves ne suivent qu'**un seul** atelier ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Balances de Roberval : On réalise trois pesées en équilibre avec des solides identiques selon leur forme (cubes C, sphères S, cylindres Y) :

- **Balance 1 :** 1 cylindre et 1 sphère équilibrent exactement 2 cubes.
- **Balance 2 :** 2 cylindres équilibrent exactement 1 cube et 2 sphères.
- **Balance 3 :** 1 cube, 1 sphère et 1 cylindre équilibrent ensemble une masse marquée de 120 **g**.

1. Combien de sphères faut-il pour équilibrer 3 cubes ?
2. Déterminer la masse exacte d'une sphère, d'un cube et d'un cylindre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

On dispose de quatre billes métalliques A, B, C et D de masses différentes, et l'on effectue trois comparaisons sur une **balance de Roberval** :

1. Les billes A et B ensemble équilibrent exactement C et D ensemble : $A + B = C + D$.
2. Les billes A et D ensemble sont plus lourdes que B et C ensemble : $A + D > B + C$.
3. La bille C seule est plus lourde que la bille D seule : $C > D$.

Classer rigoureusement les quatre billes de la **plus lourde** à la **plus légère**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Un technicien dispose de 27 **billes** d'acier identiques en apparence, mais l'une d'elles contient une bulle d'air interne et est donc **légèrement plus légère** que les autres.

1. Comment identifier avec certitude la bille défectueuse en seulement 3 **pesées** sur une balance de Roberval (sans masses marquées) ?
2. Quel est le **nombre maximal de billes** parmi lesquelles on peut retrouver une bille plus légère en 4 **pesées** ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Un commerçant utilise une balance de Roberval et possède 4 **masses étalons** de 1 **kg,** 3 **kg,** 9 **kg et** 27 **kg**. Il a le droit de placer ces masses sur n'importe lequel des deux plateaux.

1. Expliquer comment peser un colis de 14 **kg**, un colis de 20 **kg** et un colis de 35 **kg** (en plaçant le colis sur le plateau de gauche).
2. Quelle est la **masse maximale** qu'il peut peser avec ces 4 masses, et combien de masses entières différentes (de 1 kg au maximum) peut-il mesurer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Dans un laboratoire d'optique, la sécurité de la salle laser dépend de trois états booléens : le **capteur** A (actif $= 1$, inactif $= 0$), la **porte** B (ouverte $= 1$, fermée $= 0$) et l'**alarme** C (active $= 1$, inactive $= 0$).

On observe simultanément les quatre règles suivantes :

1. Si le capteur A est actif, alors la porte B est fermée.
2. La porte B est fermée si et seulement si l'alarme C est inactive.
3. Au moins l'un des deux dispositifs A ou C est actif.
4. Parmi les trois affirmations « A est actif », « B est fermée » et « C est active », **exactement deux** sont vraies.

À l'aide d'un raisonnement logique ou d'une table de vérité, déterminer l'état exact de A, B et C.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Une lampe est commandée par trois interrupteurs A, B et C (fermé $= 1$, ouvert $= 0$). Elle s'allume lorsque $S = A$ ET (B OU C) vaut 1.

1. Dresser la table de vérité de S (les 8 combinaisons).
2. Dans combien de cas la lampe est-elle allumée ?
3. Décrire un circuit électrique (série/parallèle) réalisant cette fonction.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

1. Dresser la table de vérité de NON(A ET B) et celle de (NON A) OU (NON B).
2. Que constate-t-on ? Formuler la règle en français (loi de De Morgan).
3. Appliquer : quelle est la négation de « Il fait beau et je suis en vacances » ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Sur l'île des Véridiques (toujours vrais) et des Menteurs (toujours faux), trois habitants déclarent :

- A : « B est un Menteur. »
- B : « C est un Menteur. »
- C : « A et B sont tous les deux des Menteurs. »

Déterminer la nature de chacun.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Ana, Ben, Cléo et Dan ont chacun un casier numéroté de 1 à 4 (numéros tous différents).

- Ana n'a ni le casier 1, ni le casier 4.
- Le numéro de Ben vaut 1 de plus que celui de Cléo.
- Dan a un numéro pair.

Attribuer les casiers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

On considère l'affirmation P : « Si un entier est divisible par 6, alors il est pair. »

1. P est-elle vraie ?
2. Énoncer sa **réciproque**. Est-elle vraie ?
3. Énoncer sa **contraposée**. Est-elle vraie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un marchand a 3 sacs de pièces. Dans deux sacs, les pièces pèsent 10 g ; dans un sac, toutes les pièces sont fausses et pèsent 9 g. Il dispose d'une balance électronique (qui affiche la masse).

Comment trouver le sac de fausses pièces avec **une seule pesée** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un escalier possède un interrupteur en bas (A) et un en haut (B). La lampe doit changer d'état chaque fois que l'on bascule l'un des deux interrupteurs (montage « va-et-vient »).

1. Sachant que la lampe est éteinte quand $A = 0$ et $B = 0$, compléter la table de vérité.
2. Exprimer S à l'aide des opérateurs ET, OU, NON.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Compléter la grille de sudoku 4×4 suivante : chaque ligne, chaque colonne et chacun des quatre blocs 2×2 doit contenir les chiffres 1, 2, 3 et 4.

1	·	·	4
·	4	1	·
·	·	4	·
4	3	·	·

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On admet : « Tous les physiciens sont curieux » et « Certaines personnes curieuses sont musiciennes ».

Parmi les conclusions suivantes, lesquelles sont **certaines** ?

1. Certains physiciens sont musiciens.
2. Toute personne qui n'est pas curieuse n'est pas physicienne.
3. Certains musiciens sont curieux.
4. Aucun physicien n'est musicien.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Sur l'île des Véridiques et des Menteurs :

1. Un habitant peut-il dire « Je suis un Menteur » ? Justifier.
2. Un habitant dit « Je suis un Véridique ». Peut-on savoir de qui il s'agit ?
3. Quelle question poser à un habitant, en une seule fois, pour savoir s'il est Véridique, en obtenant toujours la réponse « oui » d'un Véridique et « non » d'un Menteur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Parmi les entiers de 1 à 24, combien sont divisibles par 2 ou par 3, mais pas par les deux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Nora affirme que les 4 lampes fonctionnent. Donne la négation logique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Quatre cartes montrent 8, 9, A et B, chacune avec un entier d'un côté et une lettre de l'autre. Pour vérifier « si A, alors nombre pair », quelles cartes retourner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un programme refuse toute mesure inférieure à 4. Une mesure a été acceptée. Quelle borne déduis-tu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un panier contient 4 valeurs positives et deux valeurs nulles. Réfute « toutes les valeurs sont strictement positives ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On sait que si P alors Q, et si Q alors R. R est faux. Que valent P et Q ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Exactement une des affirmations « la boîte A est vide » et « la boîte B est vide » est vraie. A est pleine. Que vaut la seconde ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Au moins deux personnes parmi Aya, Lou et Noé sont présentes. Aya est absente. Qui est présent ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Si une carte est rouge, elle est ronde. Si elle est ronde, elle porte un M. Une carte rouge porte-t-elle M ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Deux propositions P et Q sont fausses. Quelle est la valeur de « P ou Q », avec un ou inclusif ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Stratégies

Exercice 1

Vous disposez d'une fontaine d'eau illimitée et de deux bidons **non gradués** de contenances 9 **L** et 4 **L**.

Comment obtenir exactement 6 **L** d'eau dans le bidon de 9 L ? Détailler chaque étape.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Un chimiste souhaite mesurer exactement 2 **L** d'eau distillée à partir d'un robinet, en utilisant un bidon de 12 **L** et un bidon de 8 **L**.

1. Si aucun des deux bidons n'est gradué, montrer pourquoi il est **mathématiquement impossible** d'obtenir 2 L (quel que soit le nombre de transvasements).
2. Finalement, le bidon de 8 L possède une **unique graduation à** 5 **L**. Comment obtenir exactement 2 **L** dans le bidon de 12 L en seulement 4 **manipulations** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Une bonbonne pleine contient 12 **L** d'huile d'olive. Vous disposez de deux bidons vides non gradués de 8 **L** et de 5 **L**.

Comment répartir l'huile en deux parts exactement égales de 6 **L** (sans rien jeter) en 7 **transvasements** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Problème de partage équitable (inspiré de Fibonacci) : Lors d'une excursion scientifique, **Alice** apporte 5 **barres énergétiques** et **Bob** en apporte 3 (toutes identiques). Au moment de manger, **Chloé** les rejoint sans provisions.

Ils décident de partager équitablement les 8 **barres** entre les trois. À la fin du repas, Chloé remercie ses camarades et leur donne 8 **CHF** pour payer sa part.

1. Quelle fraction de barre chacun a-t-il mangée ?
2. Pourquoi serait-il **injuste** qu'Alice prenne 5 CHF et Bob 3 CHF ?
3. Comment Alice et Bob doivent-ils se partager les 8 **CHF** équitablement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Optimisation d'une réservation : Une classe de 23 **élèves** et 2 **enseignants** (25 personnes au total) réserve une visite au planétarium.

La billetterie propose deux formules cumulables :

- **Billet individuel :** 15 CHF par élève et 24 CHF par adulte.
- **Pack « Tribu 10 » :** 135 CHF pour un groupe de 10 entrées quelconques (élèves ou adultes).

1. Quel serait le coût total si tout le monde prenait des billets individuels ? Et si l'on achetait 3 Packs « Tribu 10 » ?
2. Quelle est la **stratégie de réservation la moins chère** en combinant Packs et billets individuels ? Préciser qui doit être inclus dans les Packs et calculer l'économie réalisée par rapport au tarif individuel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le partage des 17 microscopes : Un directeur de collège lègue sa collection de 17 **microscopes** à trois laboratoires de sciences selon les proportions suivantes :

- la moitié ($\frac{1}{2}$) pour le laboratoire de biologie ;
- le tiers ($\frac{1}{3}$) pour le laboratoire de chimie ;
- le neuvième ($\frac{1}{9}$) pour le laboratoire de physique.

1. Pourquoi est-il impossible d'effectuer directement ce partage sans démonter les appareils ?
2. Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$: que remarque-t-on ?
3. Un professeur astucieux propose de **prêter temporairement son propre microscope** au lot pour passer à 18 appareils, d'effectuer le partage, puis de reprendre son appareil. Montrer comment cela résout le problème.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Partage équitable d'un trajet : Trois techniciens — **Nadia**, **Olivier** et **Paul** — partagent une camionnette de location pour une mission de 100 km, facturée au total 180 **CHF** (soit proportionnellement à la distance : 1,80 CHF/km).

- Tous les trois partent ensemble au kilomètre 0.

- **Olivier** descend après 40 **km**.
- **Paul** descend après 70 **km**.
- **Nadia** termine seule le trajet jusqu'au kilomètre 100.

En découpant le parcours en 3 tronçons successifs, calculer combien chacun doit payer équitablement.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Stratégie de réservation d'une salle (ordonnancement) : Sept groupes demandent à réserver l'unique salle de travaux pratiques pour la journée. Voici leurs créneaux horaires (un créneau choisi doit être pris en entier et deux créneaux ne peuvent pas se chevaucher) :

Atelier	A	B	C	D	E	F	G
Horaire	8h00–13h00	9h00–10h30	10h15–11h15	11h00–13h00	12h45–15h15	15h00–16h30	16h30–18h00

1. Quel nombre d'ateliers obtient-on si l'on applique la stratégie naïve consistant à choisir toujours l'atelier disponible qui **commence le plus tôt** ?
2. Montrer qu'en choisissant à chaque étape l'atelier compatible qui **se termine le plus tôt**, on parvient à caser un nombre maximal d'ateliers (préciser lesquels).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Traversée stratégique : Quatre chercheurs doivent traverser un tunnel sombre avec **une seule lampe torche**. Le tunnel est étroit : au maximum **deux personnes** peuvent y marcher ensemble, à la vitesse du plus lent des deux, et la lampe doit être portée à chaque traversée (aller ou retour).

Leurs temps de traversée respectifs sont : 1 **min**, 2 **min**, 5 **min** et 10 **min**.

1. Combien de temps prend la stratégie intuitive où le plus rapide (1 min) accompagne tour à tour chacun des trois autres ?
2. Quelle stratégie astucieuse permet de faire passer tout le monde en seulement 17 **minutes** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Le paradoxe des deux béchers (invariant de conservation) : Un bécher A contient 100 **mL d'eau pure** et un bécher B contient 100 **mL de sirop pur**.

1. On prélève 20 mL d'eau dans A, on les verse dans B et l'on mélange jusqu'à homogénéité.
2. On prélève ensuite 20 mL du mélange obtenu dans B et on les reverse dans A.

Y a-t-il finalement **plus de sirop dans le bécher** A ou **plus d'eau dans le bécher** B ? Démontrer le résultat de deux manières : d'abord par le calcul exact des concentrations, puis en deux lignes par un **argument de conservation**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Avec un récipient de 3 L et un récipient de 5 L (non gradués) et une source d'eau illimitée, comment obtenir exactement 4 L ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Vous avez un sablier de 4 minutes et un sablier de 7 minutes. Comment mesurer exactement 9 minutes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On choisit un nombre. On le double, on retire 6, on divise le résultat par 4, puis on ajoute 5. On obtient 12.

Quel était le nombre de départ ? Utiliser la stratégie « en partant de la fin ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Sept gobelets sont posés à l'envers sur une table. À chaque coup, on doit retourner **exactement deux** gobelets.

Peut-on arriver à ce que les sept gobelets soient à l'endroit ? Justifier à l'aide d'un **invariant**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

On note $100! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 100$.

1. Pourquoi chaque zéro à la fin de 100! provient-il d'un facteur $10 = 2 \times 5$?
2. Combien de facteurs 5 apparaissent dans 100! ? (Penser aux multiples de 25.)
3. En déduire le nombre de zéros à la fin de 100!.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Peut-on dessiner chacune des figures suivantes sans lever le crayon et sans repasser sur un trait ? On utilisera la règle d'Euler : c'est possible si et seulement si le nombre de sommets d'où partent un nombre **impair** de traits est 0 ou 2.

1. Un carré avec ses deux diagonales.
2. Une « maison » : un carré avec ses deux diagonales, surmonté d'un toit triangulaire.
3. Les sept ponts de Königsberg : 4 zones reliées par des ponts, d'où partent respectivement 5, 3, 3 et 3 ponts.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On veut construire un enclos rectangulaire avec 24 m de grillage, en utilisant des longueurs entières en mètres.

1. Lister tous les rectangles possibles et leur aire (stratégie : faire un tableau organisé).
2. Lequel a la plus grande aire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Trouver deux nombres entiers dont la somme vaut 50 et le produit 600. Proposer une stratégie d'essais organisés.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On forme des codes de 3 lettres avec les lettres A, B et C.

1. Combien de codes peut-on former si les lettres peuvent se répéter ?
2. Combien si les trois lettres doivent être différentes ? Les écrire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Problème de Josèphe : 10 personnes numérotées de 1 à 10 sont assises en cercle. On part de la personne 1 et on élimine **une personne sur deux** : 2, 4, 6, … en continuant à tourner jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une personne.

1. Simuler le processus. Qui reste ?
2. Faire de même avec 8 personnes. Que remarque-t-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Deux joueurs retirent 1 à 4 jetons à tour de rôle. Le dernier jeton gagne. La pile en contient 22. Quel premier retrait permet de forcer le gain ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Trouve un numéro de 1 à 16 avec des questions oui/non. Combien suffisent dans le pire cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une pièce plus lourde est cachée parmi 27 pièces de même aspect. Comment la trouver en 3 pesées sur une balance à plateaux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On avance de 1 ou 2 cases par tour. Donne une plus courte suite pour atteindre 9 depuis zéro.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Parcours les 5 branches d'une étoile qui relient un centre à autant de culs-de-sac, en partant et revenant au centre. Minimum de passages d'arête ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Parmi 8 boutons, un seul ouvre une boîte. Combien de tests au pire pour identifier le bon, sans obligation de l'actionner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On ajoute 1 ou 4 au score, initialement nul. Comment atteindre 21 en un minimum de tours ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Quatre îlots A, B, C, D sont reliés par des chemins AB, AC, BC et CD de durées 6, 2, 1 et 4 minutes. Trouve le trajet le plus rapide de A à D.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On dispose de bidons non gradués de 10 et 6 L. On peut remplir, vider ou transvaser jusqu'à remplir un bidon ou vider l'autre. Peut-on isoler 5 L ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une pile contient 16 jetons. À chaque tour on en retire 1, 2 ou 3. Celui qui retire le dernier perd. Que joue en premier un joueur qui veut assurer le gain ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Casse-têtes

Exercice 1

On observe les deux suites numériques suivantes :

- Suite (T_n) : 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; ...
- Suite (U_n) : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; **31** ; ...

1. Donner les deux termes suivants de la suite (T_n) (nombres triangulaires) et calculer T_{20} sans écrire les 20 termes.
2. Pourquoi le 6e terme de (U_n) vaut-il 31 et non 32 ? *(Indice : calculer les différences successives entre termes consécutifs ; cette suite donne le nombre maximal de régions créées dans un disque par les cordes reliant n points du cercle !)* Donner le 7e terme U_7.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Observer les égalités suivantes :

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

1. Expliquer géométriquement (à l'aide d'un carré découpé en « équerres ») pourquoi la somme des n premiers nombres impairs vaut toujours n^2.
2. Utiliser cette régularité pour calculer instantanément :
   - $S_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$
   - $S_2 = 21 + 23 + 25 + \cdots + 59$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Énigme auto-descriptive : On cherche un nombre à 4 **chiffres** $\overline{abcd}$ qui se décrit lui-même de la façon suivante :

- son 1er chiffre a indique **combien de** 0 figurent dans le nombre ;
- son 2e chiffre b indique **combien de** 1 figurent dans le nombre ;
- son 3e chiffre c indique **combien de** 2 figurent dans le nombre ;
- son 4e chiffre d indique **combien de** 3 figurent dans le nombre.

1. Expliquer pourquoi l'on a obligatoirement $a + b + c + d = 4$ (et $a \geq 1$).
2. Montrer également que $0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + 3 \cdot d = 4$.
3. En déduire les **deux seuls nombres auto-descriptifs** à 4 chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Tableau auto-descriptif : On considère le tableau à 8 cases ci-dessous, dans lequel la deuxième ligne (c_1, c_2, c_3, c_4) doit être complétée par des entiers de sorte que **chaque case c_k indique le nombre total de fois que l'entier k apparaît dans l'ensemble des 8 cases du tableau** (première ligne comprise) :

1	2	3	4
c_1	c_2	c_3	c_4

1. Combien vaut nécessairement la somme $c_1 + c_2 + c_3 + c_4$?
2. Trouver les **deux solutions** possibles pour (c_1, c_2, c_3, c_4).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Le défi des quatre 4 : En utilisant **exactement quatre fois le chiffre** 4, les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$, la racine carrée $\sqrt{4} = 2$ et des parenthèses (sans coller les chiffres comme 44), écrire une expression mathématique exacte égale à chacun des nombres suivants :

$$0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 10$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

La constante de Kaprekar (6 174) : On part d'un nombre à 4 chiffres (non tous identiques). À chaque étape, on range ses 4 chiffres dans l'ordre décroissant pour former G, dans l'ordre croissant pour former P, puis on calcule $G - P$.

1. Appliquer cet algorithme étape par étape en partant de $N_0 = 3\,524$ jusqu'à obtenir un nombre qui se répète.
2. Vérifier que 6 174 est bien un **point fixe** (invariant) de cette opération.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Dans un **carré magique**, la somme des nombres sur chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux grandes diagonales est toujours la même.

1. Compléter le carré magique ci-dessous en justifiant chaque étape :

11	a	9
b	8	c
7	d	e

2. Montrer algébriquement que dans **tout** carré magique 3×3, la somme magique S vaut toujours le **triple du nombre central** ($S = 3 \times$ centre).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Jeu d'invariant sur tableau : On écrit au tableau les dix entiers de 1 à 10 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

À chaque étape, un joueur choisit **deux nombres quelconques** a et b au tableau, les efface, et écrit à la place leur écart positif $|a - b|$. Au bout de 9 étapes, il ne reste plus qu'**un seul nombre** au tableau.

1. Quel est l'effet d'une étape sur la **parité de la somme** de tous les nombres écrits au tableau ?
2. Le dernier nombre restant peut-il être égal à 0 ? Peut-il être égal à 2 ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Cryptarithme célèbre : Chaque lettre différente représente un chiffre différent de 0 à 9, et la première lettre d'un mot ne peut jamais être 0.

Résoudre l'addition codée suivante :

$$\begin{array}{r} S\,E\,N\,D \\ +\,M\,O\,R\,E \\ \hline =M\,O\,N\,E\,Y \end{array}$$

(Indication : commencer par déterminer M, puis O et S, puis le lien entre E et N.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Le tour de magie du nombre $1\,089$ **(algèbre et régularité) :**

1. Choisir un nombre à 3 chiffres $\overline{abc}$ tel que $a > c+1$ (par exemple 742). Écrire le nombre renversé $\overline{cba}$, puis calculer la différence $D = \overline{abc} - \overline{cba}$.
2. Renverser les 3 chiffres de D pour former D', puis calculer la somme $D + D'$. Quel résultat obtient-on ?
3. **Démonstration algébrique :** En écrivant $\overline{abc} = 100a+10b+c$ et en observant que $D = 99(a-c)$, démontrer que le résultat final vaut **toujours** $1\,089$, quel que soit le nombre de départ choisi (avec $a > c+1$… en fait même $a > c$ si l'on écrit 099 pour 99 !).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

La constante 495 **:** on part d'un nombre de 3 chiffres non tous égaux. On forme le plus grand et le plus petit nombre avec ses chiffres, puis on calcule leur différence. On recommence avec le résultat.

1. Appliquer la méthode à 352.
2. Appliquer la méthode à 100 (le plus petit nombre s'écrit alors 001).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On considère le nombre $N = 142\,857$.

1. Calculer $2N$, $3N$, $4N$, $5N$ et $6N$. Que remarque-t-on ?
2. Calculer $7N$.
3. Calculer $\frac{1}{7}$ en écriture décimale. Quel lien ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Les tours de Hanoï : on doit déplacer une pile de n disques de tailles différentes d'un piquet à un autre, en utilisant un troisième piquet. On ne déplace qu'un disque à la fois et on ne pose jamais un disque sur un plus petit.

1. Combien de déplacements faut-il au minimum pour 1, 2, 3 disques ?
2. Expliquer pourquoi $H(n) = 2 \times H(n-1) + 1$. En déduire $H(5)$.
3. On admet que $H(n) = 2^n - 1$. Avec 64 disques, à raison d'un déplacement par seconde, combien de temps faudrait-il (ordre de grandeur en années) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

L'épitaphe de Diophante (mathématicien grec) dit en substance :

« Son enfance dura $\frac{1}{6}$ de sa vie ; sa barbe poussa après $\frac{1}{12}$ de plus ; il se maria après $\frac{1}{7}$ de plus, et cinq ans plus tard naquit son fils. Celui-ci vécut la moitié de l'âge de son père, et le père mourut quatre ans après son fils. »

Quel âge avait Diophante à sa mort ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Les lapins de Fibonacci : un couple de lapins nouveau-nés devient adulte au bout d'un mois, puis donne naissance chaque mois à un nouveau couple. Aucun lapin ne meurt.

1. Compléter le nombre de couples au début de chaque mois, de 1 à 8 (1, 1, 2, 3, …).
2. Expliquer pourquoi chaque terme est la somme des deux précédents.
3. Combien de couples y aura-t-il au 12e mois ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

On écrit tous les nombres entiers de 1 à 100.

1. Combien de fois écrit-on le chiffre 1 ?
2. Combien de chiffres écrit-on au total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Pour numéroter les pages d'un livre (à partir de la page 1), un imprimeur a utilisé 1 002 chiffres.

Combien de pages compte ce livre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Quel angle forment les aiguilles d'une horloge :

1. à 4 h 20 ?
2. à 9 h 45 ?
3. Entre 3 h et 4 h, à quel moment (environ) les aiguilles sont-elles superposées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

1. Écrire 15 comme somme d'au moins deux entiers naturels non nuls **consécutifs**, de toutes les façons possibles.
2. Faire de même avec 16. Que remarque-t-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un nombre de 6 chiffres commence par 1. Si l'on déplace ce 1 à la fin du nombre, on obtient un nombre trois fois plus grand.

Trouver ce nombre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un damier de 12 par 12 cases perd une case. Peut-on couvrir le reste exactement avec des dominos de deux cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Insère les signes $+$, $-$ ou $\times$ pour faire 27 avec, dans l'ordre, 6, 4, 2 et 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Avec les chiffres 1, 2 et 6 utilisés une fois par nombre, donne la plus grande différence entre deux nombres de trois chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un cube peint sur ses faces est découpé en $6 \times 6 \times 6$ petits cubes. Combien ont trois faces peintes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Apparie les nombres de 1 à 12 pour que toutes les paires aient la même somme.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien de carrés de 2×2 cases contient une grille de 6×6 cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un escargot monte de 6 m par jour et redescend de 4 m par nuit. Quand sort-il d'un puits de 12 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Les nombres 1 à 9 sont arrangés dans un carré magique de trois cases sur trois. Quelle somme doit donner chaque ligne ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Place six pièces en quatre lignes droites de trois pièces chacune. Donne une configuration.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une grille de 4×4 cases contient combien de rectangles de toutes tailles alignés sur ses lignes, carrés compris ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Irrationalité et racine carrée de deux

Exercice 1

Classification des ensembles de nombres : On rappelle les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels, nombres réels).

Pour chacun des nombres suivants, indiquer le **plus petit ensemble** auquel il appartient :

$$a = -\frac{12}{3} \quad ; \quad b = \frac{7}{20} \quad ; \quad c = \frac{5}{6} \quad ; \quad d = \sqrt{49} \quad ; \quad e = \sqrt{8} \quad ; \quad f = 0{,}123123123\ldots$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Preuve de non-décimalité : Un nombre rationnel écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est un **nombre décimal** ($\in \mathbb{D}$) si et seulement si q ne possède que 2 et 5 comme facteurs premiers.

1. Sans effectuer la division, déterminer lesquelles des fractions suivantes représentent des nombres décimaux (après simplification) :
$$\frac{21}{28} \quad ; \quad \frac{9}{15} \quad ; \quad \frac{14}{35} \quad ; \quad \frac{15}{22}$$
2. Montrer par un argument portant sur le dernier chiffre qu'il n'existe **aucun nombre décimal** d tel que $d^2 = 2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Preuve célèbre d'irrationalité de $\sqrt{2}$ (raisonnement par l'absurde) :

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrive sous forme de **fraction irréductible** $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGDC}(p; q) = 1$.

1. Élever au carré pour obtenir $p^2 = 2q^2$, et en déduire que p **est pair** (justifier pourquoi un entier impair a toujours un carré impair).
2. En écrivant $p = 2k$, montrer ensuite que q **est également pair**.
3. Expliquer en quoi cela fournit une contradiction et conclure.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Preuve d'irrationalité de $\sqrt{3}$ et stabilité de $\mathbb{Q}$:

1. Adapter la démonstration précédente pour prouver que $\sqrt{3}$ **est irrationnel** *(indice : utiliser le reste modulo 3 d'un entier n pour montrer que si 3 divise n^2, alors 3 divise n).*
2. Sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, montrer par l'absurde que $x = 1 + 3\sqrt{2}$ est également irrationnel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Piège sur la somme et le produit d'irrationnels : Les affirmations suivantes sont-elles **vraies ou fausses** ? Si une affirmation est fausse, donner un contre-exemple simple.

1. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est toujours irrationnelle.
2. La somme de deux nombres irrationnels est toujours irrationnelle.
3. Le produit de deux nombres irrationnels est toujours irrationnel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le format de papier A4 et $\sqrt{2}$: Les feuilles de papier standard (A0, A1, A2, A3, A4, A5…) sont conçues de sorte que lorsqu'on **coupe une feuille en deux** dans le sens de sa plus grande dimension (sa longueur L), la demi-feuille obtenue (de dimensions ℓ et $L/2$) garde **exactement les mêmes proportions** que la feuille initiale.

1. Écrire l'égalité de proportion entre $\frac{L}{\ell}$ et le format de la demi-feuille, puis démontrer que $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$.
2. Sachant qu'une feuille **A0** a une aire exacte de 1 $\mathbf{m}^2$ ($L_0 \times \ell_0 = 1$), calculer les dimensions L_0 et ℓ_0 d'une feuille A0, puis celles d'une feuille **A4** (obtenue en pliant 4 fois en deux, arrondies au millimètre près, avec $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Construction géométrique à la règle et au compas — Escargot de Pythagore (spirale de Théodore) :

On part d'un triangle rectangle isocèle OA_0A_1 rectangle en A_0, avec $OA_0 = A_0A_1 = 1$ cm. À chaque étape $k \geq 1$, on construit extérieurement un nouveau triangle rectangle OA_kA_{k+1} rectangle en A_k, avec $A_kA_{k+1} = 1$ cm.

1. Calculer les longueurs exactes OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 et OA_n en fonction de n.
2. Comment utiliser cette construction et un compas pour placer exactement $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ sur une droite graduée d'origine O ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Construction géométrique de $\sqrt{a}$ en une seule étape (méthode d'Euclide par le demi-cercle) :

Sur une droite, on place trois points alignés dans cet ordre : A, H et B tels que $AH = a$ et $HB = 1$ (avec $a > 0$, en cm). On trace le **demi-cercle de diamètre** $[AB]$, puis la perpendiculaire à (AB) passant par H, qui coupe le demi-cercle en C.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. En exprimant AC^2 et BC^2 dans les triangles rectangles AHC et BHC, puis en utilisant le théorème de Pythagore dans ABC, démontrer que $CH = \sqrt{a}$.
3. Quelle longueur faut-il prendre pour AH et HB si l'on veut construire $\sqrt{6}$ en un seul tracé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Encadrement et algorithme d'Héron d'Alexandrie pour $\sqrt{2}$:

1. Expliquer pourquoi $\sqrt{2}$ vérifie $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, puis $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ (sans touche $\sqrt{\ }$).
2. Pour approcher $\sqrt{2}$ très rapidement, Héron construit une suite de rectangles d'aire 2 en remplaçant à chaque étape la dimension x_n par la **moyenne arithmétique** de x_n et $\frac{2}{x_n}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

   En partant de $x_0 = 1$, calculer sous forme de **fractions irréductibles** les trois termes suivants x_1, x_2 et x_3, puis comparer x_3 à $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Fraction continue de $\sqrt{2}$ et racines emboîtées :

1. Vérifier que $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, puis en déduire que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$.

2. En remplaçant indéfiniment $(\sqrt{2}-1)$ au dénominateur, on obtient la fraction continue infinie $[1;2,2,2,\dots]$. Calculer les quatre premières réduites :

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = 1 + \frac{1}{2} \quad ; \quad r_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \quad ; \quad r_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

3. Comparer r_0, r_1, r_2, r_3 à $\sqrt{2}$: comment s'approchent-elles de $\sqrt{2}$ (par excès ou par défaut) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

$$\sqrt{16}\ ;\ \sqrt{8}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ -7\ ;\ 0{,}25\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{\frac{9}{4}}\ ;\ -\frac{12}{4}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Simplifier les expressions suivantes (sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible) :

1. $\sqrt{50}$
2. $\sqrt{72}$
3. $\sqrt{18} + \sqrt{8}$
4. $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

1. Sans calculatrice, montrer que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
2. Encadrer $\sqrt{2}$ au millième près en calculant $1{,}414^2$ et $1{,}415^2$.
3. Pourquoi ne pourra-t-on jamais écrire $\sqrt{2}$ avec un nombre fini de décimales ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

1. Calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 5 cm (valeur exacte puis approchée au centième).
2. Quel est le côté d'un carré d'aire 2 m^2 ?
3. Un triangle rectangle isocèle a une hypoténuse de 10 cm. Calculer la longueur de ses côtés de l'angle droit.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Rendre rationnel le dénominateur (écrire sans racine au dénominateur) :

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{10}{\sqrt{5}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (multiplier par $\sqrt{2}+1$)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

1. Écrire $x = 0{,}272727\ldots$ sous forme de fraction irréductible (calculer $100x - x$).
2. Même question pour $y = 0{,}999\ldots$ Que remarque-t-on ?
3. Pourquoi tout nombre dont l'écriture décimale est périodique est-il rationnel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Démontrer par l'absurde que $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Démontrer de même que $3\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Le produit de deux irrationnels est-il toujours irrationnel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Algorithme de Héron : pour approcher $\sqrt{2}$, on part de $x_0 = 1$ et on calcule $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.

1. Calculer x_1, x_2 et x_3 (fractions puis valeurs décimales).
2. Comparer x_3 avec $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$.
3. Expliquer l'idée : pourquoi la moyenne de x et $\frac{2}{x}$ est-elle une meilleure approximation ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Dans un triangle rectangle, calculer l'hypoténuse (valeur exacte) lorsque les côtés de l'angle droit mesurent :

1. 1 et 1
2. 1 et 2
3. 2 et 3
4. Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{5}$ dans un quadrillage. Comment s'y prendre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On considère les nombres :

- $a = 0{,}1212121212\ldots$ (le bloc « 12 » se répète)
- $b = 0{,}1010010001000010\ldots$ (on ajoute un zéro de plus entre chaque 1)

1. a est-il rationnel ? Si oui, l'écrire sous forme de fraction.
2. b est-il rationnel ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Entre quels centièmes consécutifs se trouve $\sqrt{2}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Le décimal 1,414 est-il exactement égal à $\sqrt{2}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Justifie que si le carré d'un entier est pair, l'entier est pair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Suppose $\sqrt{2} = p/q$ avec des entiers p et q premiers entre eux et q > 0. Quelle contradiction obtient-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un carré a des côtés de 7 cm. Sa diagonale peut-elle avoir une longueur rationnelle en centimètres ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

La somme $3 + \sqrt{2}$ est-elle rationnelle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Donne deux irrationnels dont le produit est rationnel.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Trouve un irrationnel strictement compris entre 2 et 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Le nombre 0,121212… avec répétition de 12 est-il rationnel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Donne l'inverse de $\sqrt{2}$ sous une forme sans racine au dénominateur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Pi et le cercle

Exercice 1

Méthode d'Archimède — Encadrement à l'ordre 1 (carrés et hexagones) :

On considère un cercle de diamètre $D = 1$ (donc de rayon $R = \frac{1}{2}$), dont la circonférence vaut exactement $\pi \times D = \pi$.

1. En inscrivant un **carré** à l'intérieur du cercle et en circonscrivant un **carré** à l'extérieur du cercle, établir un premier encadrement de π (avec $\sqrt{2} \approx 1{,}414$).
2. Faire de même avec un **hexagone régulier inscrit** dans le cercle de rayon $R = \frac{1}{2}$ et un **hexagone régulier circonscrit** (en utilisant $\sqrt{3} \approx 1{,}732$) pour obtenir le célèbre encadrement initial d'Archimède.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Méthode d'Archimède — Passage de l'hexagone (6 côtés) au dodécagone (12 côtés) :

Dans un cercle de rayon $R = 1$ (circonférence 2π), si un polygone régulier inscrit à n côtés a pour côté s_n, le doublement du nombre de côtés ($2n$) donne un côté de longueur :

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

1. Sachant que pour l'hexagone ($n = 6$), $s_6 = 1$, calculer la valeur exacte de s_{12}, puis sa valeur approchée (avec $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$).
2. En déduire le demi-périmètre $b_{12} = 6 \cdot s_{12}$ du dodécagone inscrit (qui donne une borne inférieure de π).
3. Pour le dodécagone circonscrit de demi-périmètre a_{12}, Archimède utilise la moyenne harmonique de $a_6 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46410$ et $b_6 = 3$:
$$a_{12} = \frac{2 \cdot a_6 \cdot b_6}{a_6 + b_6}$$
Calculer a_{12} et donner l'encadrement de π obtenu à l'ordre 12.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

L'encadrement d'Archimède à 96 côtés :

Vers 250 av. J.-C., Archimède démontra que la valeur exacte de π est encadrée par deux fractions :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

1. Écrire ces deux bornes sous forme de fractions simples $\frac{p}{q}$, puis calculer leurs valeurs décimales à 10^{-5} près.
2. Comparer ces deux bornes à la valeur $\pi \approx 3{,}14159265$: combien de décimales exactes fournit déjà cet encadrement ?
3. Quelle erreur absolue commet-on lorsqu'on remplace π par la valeur courante $\frac{22}{7}$ pour calculer la circonférence de la Terre (rayon $R = 6\,371$ km) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Fractions continues de π : Le développement en fraction continue simple de π débute par :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

que l'on note $[3; 7, 15, 1, 292, \ldots]$.

1. Calculer sous forme de fraction irréductible les quatre premières réduites :
   - $c_0 = 3$
   - $c_1 = [3; 7]$
   - $c_2 = [3; 7, 15]$
   - $c_3 = [3; 7, 15, 1]$
2. Vérifier la précision exceptionnelle de la fraction c_3 (découverte par le mathématicien chinois Zu Chongzhi au Ve siècle) par rapport à $\pi \approx 3{,}1415926535$. Pourquoi cette réduite est-elle si précise ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Comment retrouver la fraction continue d'un nombre réel ? Pour obtenir le développement en fraction continue d'un nombre x, on répète l'algorithme suivant :

- prendre la partie entière $a_k = \lfloor x_k \rfloor$;
- si le reste $r_k = x_k - a_k$ est non nul, poser $x_{k+1} = \frac{1}{r_k}$ et recommencer.

1. Appliquer cet algorithme à la valeur approchée $\pi \approx 3{,}14159265$ pour retrouver les trois premiers entiers $[a_0; a_1, a_2]$ (et vérifier qu'on trouve bien $3, 7, 15$).
2. En déduire le développement en fraction continue exact de la fraction rationnelle $\frac{43}{30}$ (remarquer le lien avec l'algorithme d'Euclide !).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le paradoxe de la corde autour de la Terre :

1. On imagine une corde tendue exactement le long de l'équateur terrestre (cercle de rayon $R_T = 6\,371$ km). On allonge cette corde de 1 **mètre** et on la soulève uniformément tout autour de la Terre pour former un nouveau cercle concentrique. De quelle hauteur h (en cm) la corde s'élève-t-elle au-dessus du sol ? Un chat pourrait-il passer dessous ?
2. Quelle serait cette même hauteur h si l'on faisait l'expérience avec une balle de tennis (rayon $r = 3{,}3$ cm) au lieu de la Terre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Les lunules d'Hippocrate de Chios : Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

On trace à l'extérieur du triangle les deux demi-disques de diamètres $[AB]$ et $[AC]$, et du même côté que A le demi-disque de diamètre l'hypoténuse $[BC]$. Les deux croissants formés à l'extérieur du grand demi-disque sont appelés **lunules**.

1. Calculer la longueur de l'hypoténuse BC.
2. Calculer (en fonction de π) les aires des trois demi-disques construits sur $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
3. En déduire l'**aire totale des deux lunules** (somme des deux petits demi-disques plus le triangle ABC, moins le grand demi-disque). Que remarque-t-on vis-à-vis de π ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Estimer π expérimentalement (Monte-Carlo et pesée) :

1. On inscrit un disque de rayon $R = 1$ dans un carré de côté 2. Si l'on tire un point au hasard uniformément dans le carré, quelle est la probabilité théorique p qu'il tombe dans le disque ?
2. Lors d'une simulation de $N = 10\,000$ tirs aléatoires, $7\,852$ **points** tombent dans le disque. En déduire une estimation de π.
3. *Méthode expérimentale par pesée :* Dans une plaque de carton homogène d'épaisseur constante, on découpe un carré de 20 cm de côté (masse mesurée : $m_{\text{carré}} = 80{,}0$ g) et un disque de diamètre 20 cm (masse mesurée : $m_{\text{disque}} = 62{,}8$ g). En déduire une estimation expérimentale de π.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Couronnes circulaires et secteurs :

1. Une cible est formée de deux cercles concentriques de rayons $r = 6$ cm et $R = 10$ cm. Calculer l'aire exacte (en fonction de π) et approchée de l'anneau (couronne circulaire) compris entre les deux cercles.

2. Un essuie-glace de longueur $L = 45$ cm pivote d'un angle de 120°. La lame en caoutchouc nettoie la zone comprise entre 15 cm et 45 cm du pivot. Calculer l'aire exacte de pare-brise nettoyée en un passage.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Comparaison de formules et approximations historiques de π :

1. Les anciens Égyptiens (papyrus Rhind) utilisaient l'approximation $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$. Calculer cette valeur au millième près et l'erreur relative par rapport à $\pi \approx 3{,}1416$.
2. La **série de Madhava–Leibniz** relie π aux inverses des entiers impairs :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

   Calculer l'approximation de π donnée par les 5 premiers termes de cette somme. Converge-t-elle vite ?
3. Le **problème de Bâle** (résolu par Leonhard Euler en 1735) donne $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ Calculer l'approximation de π obtenue en additionnant les 4 premiers termes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Une roue de vélo a un diamètre de 70 cm.

1. Quelle distance parcourt le vélo lorsque la roue fait un tour (au millimètre près) ?
2. Combien de tours fait la roue sur un trajet de 1 km ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Ératosthène (IIIe siècle av. J.-C.) a mesuré la Terre : à midi le jour du solstice, le Soleil était à la verticale de Syène, tandis qu'à Alexandrie, 800 km plus au nord, les rayons faisaient un angle de 7,2° avec la verticale.

1. Quelle fraction du tour complet (360°) représente 7,2° ?
2. En déduire la circonférence de la Terre.
3. En déduire son rayon (au km près).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On utilise souvent les fractions $\frac{22}{7}$ (Archimède) et $\frac{355}{113}$ (Zu Chongzhi, Ve siècle) pour approcher $\pi \approx 3{,}14159265$.

1. Donner l'écriture décimale de ces fractions (à 10^{-8} près).
2. Calculer l'erreur commise dans chaque cas.
3. Laquelle est la meilleure approximation ? Combien de décimales exactes donne-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Dans un disque de rayon 10 cm, on découpe un secteur d'angle 72°.

1. Quelle fraction du disque représente ce secteur ?
2. Calculer son aire et la longueur de son arc (valeurs exactes et arrondis au dixième).
3. Calculer le périmètre total du secteur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une piste d'athlétisme est formée de deux lignes droites de 84,39 m et de deux demi-cercles. Au bord intérieur, le rayon des virages est de 36,5 m.

1. Calculer la longueur d'un tour au bord intérieur (au dixième).
2. Le couloir 8 est situé 8,54 m plus à l'extérieur. De combien de mètres un tour y est-il plus long ?
3. Pourquoi les départs du 400 m sont-ils décalés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Une pizzeria propose une grande pizza de 40 cm de diamètre ou deux pizzas moyennes de 28 cm de diamètre, pour le même prix.

1. Calculer la surface de pizza dans chaque cas (au cm^2 près).
2. Quelle offre est la plus avantageuse ?
3. Quel devrait être le diamètre des deux petites pizzas pour avoir autant de surface que la grande ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Leibniz a découvert la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

1. Calculer $4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)$ (au millième).
2. Cette approximation est-elle bonne ? Que dire de la vitesse de convergence ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La circonférence de la Terre à l'équateur vaut environ 40 000 km, et la Terre fait un tour sur elle-même en 24 heures.

1. À quelle vitesse (en km/h) se déplace une personne située sur l'équateur ?
2. À la latitude de la Suisse, le cercle parcouru a un rayon d'environ 4 400 km. Calculer la vitesse correspondante.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On découpe un disque de rayon r en un très grand nombre de secteurs identiques, que l'on dispose tête-bêche côte à côte.

1. Quelle figure obtient-on approximativement ?
2. Quelles sont ses dimensions ?
3. En déduire la formule de l'aire du disque.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une ficelle de 1 m de long sert à délimiter une figure fermée.

1. Quelle est l'aire si la ficelle forme un carré ?
2. Quelle est l'aire si elle forme un cercle (au cm^2 près) ?
3. Quelle forme donne la plus grande aire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un bord circulaire de diamètre 23 cm est entouré d'un ruban. Quelle longueur exacte de ruban fait un tour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un disque a une circonférence de 18π cm. Donne son aire exacte.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Trouve la longueur de l'arc d'un secteur de 135° dans un cercle de rayon 8 cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une piste circulaire a un rayon de 30 m. À 1 m à l'extérieur, combien mesure le tour de plus ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un secteur de 120° d'un disque de rayon 6 cm représente quelle aire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On double le rayon d'un cercle. Comment changent circonférence et aire du disque ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une couronne a un rayon intérieur de 3 cm et extérieur de 8 cm. Calcule son aire exacte.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

La circonférence mesurée est 31,5 cm et le diamètre mesuré 10,0 cm. Quelle estimation de π en déduis-tu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de rayon 1. Chacun de ses côtés vaut $\sqrt{3}$. Que donne son périmètre comme borne sur π ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Donne le périmètre d'un quart de disque de rayon 10 cm, rayons du secteur inclus.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Nombre d'or

Exercice 1

Définition du nombre d'or Φ et du rectangle d'or : Un segment de longueur totale $a+b$ (avec $a > b > 0$) est partagé en « extrême et moyenne raison » lorsque le rapport du tout à la grande partie est égal au rapport de la grande partie à la petite :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

1. En posant $\Phi = \frac{a}{b}$, montrer que Φ est solution de l'équation du second degré : $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.
2. Vérifier par le calcul que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$ est bien la solution positive de cette équation.
3. Un rectangle d'or a pour largeur $\ell = 10$ cm. Quelle doit être sa longueur L ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Propriété géométrique du rectangle d'or et spirale d'or :

1. Un rectangle d'or a pour longueur $L = \Phi$ et pour largeur $\ell = 1$. On découpe à l'intérieur un **carré de côté** 1 (donc de côté égal à la largeur). Calculer les dimensions du **petit rectangle restant**, puis démontrer que le petit rectangle restant est **lui aussi un rectangle d'or** (même rapport longueur/largeur $= \Phi$).
2. En répétant indéfiniment ce découpage de carrés, on obtient une suite de carrés dont on relie les coins par des quarts de cercle (spirale d'or). Si le grand rectangle d'or initial a pour largeur 10 cm, quelle est l'aire du 3e carré découpé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Calculs algébriques sur Φ : Sachant que $\Phi^2 = \Phi + 1$ (sans remplacer Φ par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ avant la fin) :

1. Exprimer Φ^3, Φ^4 et Φ^5 sous la forme linéaire $a\Phi + b$ (où $a, b \in \mathbb{N}$).
2. Exprimer $\frac{1}{\Phi}$ et $\frac{1}{\Phi^2}$ sous la forme $c\Phi + d$ (où $c, d \in \mathbb{Z}$).
3. Quelle célèbre suite numérique reconnaît-on dans les coefficients a et b des puissances $\Phi^n = a_n\Phi + b_n$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Construction du rectangle d'or au compas :

On trace un carré $ABCD$ de côté 1 dm (10 cm). On place le milieu M du côté inférieur $[AB]$, puis on trace l'arc de cercle de centre M et de rayon MC, qui coupe la demi-droite $[AB)$ en un point E. On complète le rectangle $AEFD$.

1. Calculer par le théorème de Pythagore la longueur exacte MC (en dm).
2. En déduire la longueur AE du rectangle $AEFD$ et montrer que $AEFD$ est exactement un **rectangle d'or**.
3. Montrer également que le rectangle ajouté $BEFC$ est un rectangle d'or.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Le triangle d'or et le pentagone régulier : On considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que l'angle au sommet mesure $\widehat{A} = 36°$ et les côtés égaux mesurent $AB = AC = 1$ (on le nomme *triangle d'or*).

1. Calculer les mesures des angles à la base $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
2. On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$, qui coupe $[AC]$ en D. Calculer tous les angles des deux sous-triangles ABD et BCD. Que constate-t-on pour chacun d'eux ?
3. En utilisant la similitude des triangles ABC et BCD, poser $x = BC$ et démontrer que $x = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\text{grand côté}}{\text{base}}$ du triangle d'or vaut exactement Φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Le pentagone régulier et le pentagramme : Soit $ABCDE$ un pentagone régulier convexe de côté $c = 10$ cm.

1. Calculer la mesure de l'angle intérieur $\widehat{ABC}$ du pentagone régulier.
2. En traçant la diagonale $[AC]$, montrer que le triangle ACD (formé par les deux diagonales $[AC]$, $[AD]$ et le côté $[CD]$) est un **triangle d'or** ($36° - 72° - 72°$).
3. En déduire la longueur exacte d'une **diagonale** du pentagone régulier, et calculer le rapport entre deux segments successifs d'une étoile à cinq branches (pentagramme) inscrite dans ce pentagone.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Suite de Fibonacci et convergence vers Φ : La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

1. Calculer les 12 premiers termes de la suite : $F_1, F_2, \ldots, F_{12}$.
2. Calculer les rapports successifs $q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ (arrondir à 10^{-5} près) et observer comment ils encadrent $\Phi \approx 1{,}618034$.
3. En supposant que $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers une limite positive L lorsque n devient très grand, passer à la limite dans $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$ pour prouver que $L = \Phi$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Identité de Cassini et paradoxe du carré découpé :

1. Calculer la quantité $C_n = F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2$ pour $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Quelle conjecture (appelée *identité de Cassini*) formule-t-on ?
2. *Application :* On découpe un carré de côté $8 = F_6$ (aire 64) en quatre pièces (deux triangles de 3×8 et deux trapèzes de bases $3, 5$ et hauteur 5), puis on les réassemble en un rectangle de dimensions $5 \times 13 = F_5 \times F_7 = 65$. Expliquer en une phrase le lien entre ce gain apparent de 1 cm^2 et l'identité de Cassini !

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Fraction continue et radical infini de Φ :

1. À l'aide de l'équation $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, montrer que le nombre d'or s'écrit comme la fraction continue la plus simple possible : $[1; 1, 1, 1, \ldots]$. Expliquer pourquoi on le qualifie parfois de « nombre le plus irrationnel ».
2. On considère le radical emboîté infini :

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

En remarquant que l'expression sous la première racine vaut $1+x$, montrer que $x = \Phi$. Calculer les 3 premières approximations $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$ et $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (escalier / lapins / formule de Binet) :

1. Un élève monte un escalier de n marches en montant à chaque pas soit 1 **marche**, soit 2 **marches**. Notons u_n le nombre de façons différentes de gravir n marches.
   - Calculer directement u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

- Expliquer pourquoi $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 3$, et en déduire u_{10}.

2. La **formule de Binet** permet de calculer directement F_n sans calculer les termes précédents :

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Vérifier cette formule pour $n = 1$ et $n = 2$ (sachant que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\Phi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On pose $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Donner une valeur approchée de Φ au millième.
2. Développer Φ^2 et montrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
3. En déduire que $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$, et donner une valeur approchée de $\frac{1}{\Phi}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

En utilisant uniquement la relation $\Phi^2 = \Phi + 1$, exprimer sous la forme $a\Phi + b$ (avec a et b entiers) :

1. Φ^3
2. Φ^4
3. Φ^5

Que remarque-t-on sur les coefficients ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On veut partager un segment de 10 cm en deux parties a et b ($a > b$) selon la **section dorée**, c'est-à-dire telles que $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$.

1. Calculer a et b au centième.
2. Vérifier que $\frac{a}{b} \approx 1{,}618$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On compare le rapport longueur/largeur de plusieurs rectangles du quotidien :

- une carte bancaire : 85,6 mm × 53,98 mm ;
- une feuille A4 : 297 mm × 210 mm ;
- un écran 16 : 9.

1. Calculer chaque rapport au millième.
2. Lequel est le plus proche d'un rectangle d'or ($\Phi \approx 1{,}618$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

On calcule les quotients de termes consécutifs de la suite de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$.

1. Calculer $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$ et $\frac{55}{34}$ (au dix-millième).
2. Que remarque-t-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Dans un pentagone régulier, le rapport entre une diagonale et un côté vaut Φ.

1. Un pentagone régulier a des côtés de 10 cm. Calculer la longueur d'une diagonale (au millimètre).
2. On trace les 5 diagonales : elles forment une étoile (pentagramme). Combien mesure le périmètre de l'étoile (les 5 diagonales entières) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On considère les fractions emboîtées :

$$f_1 = 1 + \frac{1}{1} \qquad f_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \qquad f_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

1. Calculer f_1, f_2, f_3 et f_4 sous forme de fractions.
2. Montrer que $f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_n}$.
3. Vers quel nombre tendent ces fractions ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La **formule de Binet** permet de calculer directement un terme de la suite de Fibonacci : pour n assez grand, F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$.

1. Calculer $\frac{\Phi^{10}}{\sqrt{5}}$ à la calculatrice et comparer à $F_{10} = 55$.
2. Utiliser la formule pour estimer F_{20}.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un architecte veut dessiner une façade en forme de rectangle d'or, de largeur 31 m (la largeur étant le grand côté).

1. Quelle doit être la hauteur (au décimètre près) ?
2. Le Parthénon d'Athènes mesure environ 30,9 m de large pour 13,7 m de haut (avec le fronton). Son rapport est-il proche de Φ ?
3. Quelle conclusion critique peut-on en tirer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On trace un carré de côté 1, puis on ajoute un carré de côté 1 contre lui, puis un carré de côté 2 contre le rectangle obtenu, puis un carré de côté 3, puis 5, etc., en tournant.

1. Quelles sont les dimensions des rectangles successifs obtenus ?
2. Quelle est l'aire du rectangle après avoir placé les carrés de côtés $1, 1, 2, 3, 5, 8$? En déduire une formule pour $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$.
3. Que trace-t-on en reliant par des quarts de cercle les coins opposés de chaque carré ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On pose $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Encadre φ entre deux dixièmes consécutifs (utilise $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}4$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Pourquoi l'autre racine de $x^2 - x - 1 = 0$ est-elle écartée pour un rapport de longueurs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Sachant que $\phi^2 = \phi + 1$, exprime $1/\phi$ à l'aide de φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Sachant que $\phi^2 = \phi + 1$, réduis ϕ^3 à une expression affine en φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un rectangle d'or a une largeur de 8 cm. Estime sa longueur au dixième ($\varphi \approx 1{,}618$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un rectangle de 21×13 cm a-t-il un rapport exactement égal à φ ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Dans la suite 2, 3, 5, 8, 13, … où chaque terme est la somme des deux précédents, donne les deux suivants.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un partage d'or a une grande longueur a et une petite longueur b, avec a/b = φ. Exprime (a+b)/b à l'aide de φ.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un rectangle a pour côtés φ et 1. Après le retrait d'un carré de côté 1, quel est le rapport grand côté/petit côté du rectangle restant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un segment de 30 cm est partagé avec le rapport grand morceau/petit morceau égal à 1,618. Donne la longueur du petit morceau au dixième.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Représentations graphiques

Exercice 1

Remplissage de récipients à débit constant : On remplit d'eau à débit constant quatre récipients de même hauteur : **(A) un cylindre droit**, **(B) un cône pointant vers le bas**, **(C) un cône tronqué s'élargissant puis un col cylindrique étroit** (bouteille), et **(D) une sphère (ballon à fond rond)**.

On trace la hauteur d'eau $h(t)$ en fonction du temps t. Associer chaque récipient à la description graphique correspondante :

1. Courbe croissante dont la pente **diminue** sans cesse (courbe concave, de moins en moins raide).
2. Droite passant par l'origine (pente constante).
3. Courbe d'abord **de moins en moins raide**, puis **de plus en plus raide** au-dessus de la mi-hauteur (point d'inflexion à mi-hauteur).
4. Courbe dont la pente **diminue** d'abord, puis devient **constante et très forte** (segment rectiligne raide à la fin).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Graphique distance–temps (mouvement d'un cycliste) : Un cycliste parcourt une route droite entre son domicile ($d = 0$ km) et un laboratoire ($d = 24$ km). Sa position $d(t)$ est décrite par les quatre segments suivants :

- de $t = 0$ à $t = 30$ min : d passe linéairement de 0 à 12 km ;
- de $t = 30$ min à $t = 45$ min : d reste constant à 12 km ;
- de $t = 45$ min à $t = 75$ min : d passe linéairement de 12 à 24 km ;
- de $t = 75$ min à $t = 105$ min : il revient directement au domicile ($d = 0$ km) à vitesse constante.

1. Quelle est la signification physique du palier horizontal entre 30 min et 45 min ?
2. Calculer sa vitesse moyenne (en km/h) sur chacun des tronçons en mouvement (aller 1, aller 2, retour).
3. À quel instant repasse-t-il à 8 km de chez lui sur le chemin du retour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Piège classique : distinguer le graphique « altitude » du graphique « vitesse » !

Un train quitte une gare A, accélère régulièrement pendant 2 min jusqu'à atteindre 90 km/h, roule à vitesse constante pendant 6 min, puis freine régulièrement pendant 2 min jusqu'à s'arrêter à la gare B.

1. Décrire l'allure du graphique de la **vitesse** $v(t)$ en fonction du temps t (de $t = 0$ à $t = 10$ min).
2. Décrire l'allure du graphique de la **distance parcourue** $d(t)$ en fonction du temps t durant ces trois phases (courbure convexe, droite, courbure concave).
3. Calculer la distance totale entre les gares A et B (elle correspond à l'**aire sous la courbe** $v(t)$!).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Courbe de chauffage de l'eau (changements d'état) : On chauffe régulièrement de la glace prise à $-20°$C jusqu'à obtenir de la vapeur d'eau à 120°C sous pression atmosphérique normale. Le graphique $T(t)$ présente **deux paliers horizontaux**.

1. À quelles températures exactes se situent ces deux paliers horizontaux ? À quels phénomènes physiques correspondent-ils ?
2. Pendant un palier horizontal, l'énergie fournie par la plaque chauffante continue d'être absorbée par l'eau, mais la température n'augmente pas. À quoi sert cette énergie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Esquisse de trajectoire (balistique) : On lance une balle obliquement depuis le sol ($y = 0$ à $x = 0$) ; elle retombe au sol 20 m plus loin après être montée à une hauteur maximale de 5 m.

1. Quelle est la forme géométrique de sa trajectoire $y(x)$ (en négligeant l'air) ? Où se situe son sommet ?
2. Parmi les expressions suivantes, laquelle correspond exactement à cette trajectoire ? Vérifier les trois points clés ($x = 0$, $x = 10$, $x = 20$) :

- $f_1(x) = -0{,}05x(x-20)$
- $f_2(x) = 0{,}05x(x-20)$
- $f_3(x) = -0{,}10x(x-20)$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Association de graphiques et de grandeurs physiques : On donne quatre descriptions de courbes (C_1 à C_4) pour $x > 0$:

- C_1 **:** droite passant par l'origine ($y = kx$, $k > 0$).
- C_2 **:** hyperbole décroissante tendant vers 0 quand x devient très grand ($y = \frac{k}{x}$, $k > 0$).
- C_3 **:** courbe périodique oscillant régulièrement entre une valeur maximale et une valeur minimale.
- C_4 **:** parabole partant de l'origine et montant de plus en plus vite ($y = kx^2$, $k > 0$).

Associer chacune de ces quatre courbes au phénomène physique correspondant :

1. La pression P d'un gaz en fonction du volume V du récipient à température constante ($P \times V =$ constante).
2. La tension U aux bornes d'une prise électrique suisse (50 Hz) en fonction du temps t.
3. La force de rappel F d'un ressort en fonction de son allongement x (loi de Hooke : $F = kx$).
4. La distance de freinage d d'une voiture en fonction de sa vitesse v (proportionnelle au carré de la vitesse).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Lecture de graphe et interprétation des intersections : Deux abonnements de téléphonie ou de laboratoire proposent les tarifs mensuels suivants en fonction de la consommation x (en heures) :

- **Formule A :** $f(x) = 30$ (forfait illimité fixe de 30 CHF).
- **Formule B :** $g(x) = 10 + 2{,}5x$ (10 CHF d'abonnement +2,50 CHF par heure).
- **Formule C :** $h(x) = 5x$ (5 CHF par heure, sans abonnement).

1. Décrire l'allure géométrique des trois représentations graphiques et préciser leurs ordonnées à l'origine.
2. Calculer les coordonnées des **points d'intersection** de ces droites deux à deux.
3. Selon le nombre d'heures x, indiquer quelle formule se trouve tout en bas sur le graphique (la moins chère).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Variations qualitatives — Une randonnée en montagne : Le graphique d'altitude $a(t)$ d'un randonneur présente les caractéristiques suivantes entre 8 h et 14 h :

- De 8 h à 10 h : a passe de 600 m à 1 400 m (pente forte entre 8 h et 9 h : +500 m, puis plus douce entre 9 h et 10 h : +300 m).
- De 10 h à 10 h 30 : plateau horizontal à 1 400 m.
- De 10 h 30 à 12 h 30 : a redescend jusqu'à 1 000 m à vitesse verticale constante.
- De 12 h 30 à 14 h : a remonte à 1 600 m.

1. Quel est le **dénivelé positif total** (somme des montées) et le **dénivelé négatif total** ?
2. Sur quelle plage horaire la **vitesse ascensionnelle** (en m/h) a-t-elle été la plus élevée ?
3. À quelle altitude se trouvait le randonneur à 11 h 30 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Courbe vitesse–temps et énergie d'une balle qui rebondit : On lâche une balle de caoutchouc d'une hauteur $h_0 = 2{,}0$ m sans vitesse initiale. Elle rebondit plusieurs fois sur un sol dur en perdant un peu d'énergie à chaque choc.

1. Décrire l'esquisse qualitative du graphique de sa **hauteur** $h(t)$ au cours du temps (forme des arcs entre deux rebonds, évolution de la hauteur maximale et de la durée entre deux rebonds).
2. Que représente la forme pointue (cassure en « V ») de la courbe $h(t)$ exactement au moment où $h(t) = 0$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Esquisse et lecture d'un graphique d'aire dynamique : Un rectangle $ABCD$ a pour dimensions $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm. Un point mobile M parcourt le contour du rectangle dans l'ordre $A \to B \to C \to D$, en notant x la distance parcourue depuis A ($0 \leq x \leq 22$ cm).

On étudie la fonction $f(x)$ qui donne l'**aire du triangle** AMD (ou ADM).

1. Donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des trois côtés parcourus : $[AB]$ ($0 \leq x \leq 8$), $[BC]$ ($8 \leq x \leq 14$) et $[CD]$ ($14 \leq x \leq 22$).
2. Décrire précisément l'allure du graphique de $f(x)$ sur $[0; 22]$ (pentes et maximum).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Le graphique distance–temps d'une randonneuse est formé de trois segments reliant les points :

$$(0 \text{ min}; 0 \text{ km}) \to (30 \text{ min}; 2 \text{ km}) \to (45 \text{ min}; 2 \text{ km}) \to (75 \text{ min}; 5 \text{ km})$$

1. Décrire son mouvement sur chaque phase.
2. Calculer sa vitesse (en km/h) sur chaque phase.
3. Calculer sa vitesse moyenne sur tout le trajet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un parking coûte 2 CHF par heure **commencée** (toute heure entamée est due entièrement).

1. Combien paie-t-on pour 40 min ? 1 h ? 2 h 15 ?
2. Décrire l'allure du graphique du prix en fonction de la durée.
3. Le prix est-il proportionnel à la durée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Associer chaque situation à l'allure de son graphique (A : droite croissante passant par l'origine ; B : droite décroissante ; C : courbe qui monte de plus en plus vite ; D : courbe qui monte de moins en moins vite).

1. L'aire d'un carré en fonction de son côté.
2. Le volume d'eau restant dans une baignoire qui se vide à débit constant.
3. Le prix de l'essence en fonction du nombre de litres.
4. La baisse de température d'un thé chaud posé dans une pièce froide (écart entre sa température de départ et sa température actuelle), en fonction du temps.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$.

1. Compléter un tableau de valeurs pour $x = -1; 0; 1; 2; 3$.
2. Trouver les points d'intersection des deux courbes.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) > g(x)$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une droite passe par les points $A(1;3)$ et $B(4;9)$.

1. Calculer sa pente.
2. Déterminer son équation $y = mx + p$.
3. Le point $C(10;21)$ est-il sur cette droite ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Une voiture démarre et accélère régulièrement de 0 à 20 m/s en 10 s, puis roule à vitesse constante pendant 20 s.

1. Esquisser le graphique vitesse–temps.
2. Sur ce graphique, la distance parcourue correspond à l'aire sous la courbe. Calculer la distance parcourue en 30 s.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On suspend des masses à un ressort et on mesure sa longueur :

m (g)	0	100	200	300
L (cm)	12	14	16	18

1. Représenter L en fonction de m. Quelle est la nature du graphique ?
2. Déterminer l'expression de $L(m)$.
3. Quelle masse faut-il suspendre pour que le ressort mesure 21 cm ?
4. L'**allongement** $L - 12$ est-il proportionnel à la masse ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Le graphique de l'altitude d'un ascenseur en fonction du temps présente :

- un segment montant de $(0\text{ s};0\text{ m})$ à $(12\text{ s};18\text{ m})$;
- un palier de 12 à 20 s ;
- un segment descendant de $(20\text{ s};18\text{ m})$ à $(26\text{ s};9\text{ m})$;
- un palier ensuite.

Les étages sont espacés de 3 m (rez-de-chaussée à 0 m).

1. Raconter le trajet de l'ascenseur (étages).
2. Calculer sa vitesse à la montée et à la descente.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On lâche une balle depuis une hauteur de 1,8 m. À chaque rebond, elle remonte aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur précédente.

1. Calculer les hauteurs atteintes après les 1er, 2e et 3e rebonds.
2. Décrire l'allure du graphique hauteur–temps.
3. Après combien de rebonds la balle remonte-t-elle à moins de 20 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On chauffe 1 L d'eau prise à 20°C avec une puissance constante. La température monte de 8°C par minute jusqu'à 100°C, puis l'eau bout.

1. Au bout de combien de temps l'eau commence-t-elle à bouillir ?
2. Décrire l'allure du graphique température–temps, y compris après le début de l'ébullition.
3. Comment se modifie le graphique si l'on chauffe 2 L d'eau avec la même puissance ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un graphique position-temps est horizontal de t = 4 s à t = 9 s à la position 12 m. Décris le mouvement sur cet intervalle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une position passe de 7 m à 27 m entre 2 et 6 s sur un segment de droite. Donne la vitesse algébrique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un capteur de température décrit une droite passant par (0 min, 15 °C) et (8 min, 31 °C). Donne l'indication à 3 min.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux courbes de hauteur en fonction du temps se croisent en (5 s, 9 m). Que signifie leur intersection ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un mobile passe de 0 à 18 m, puis revient à 10 m. Compare déplacement et distance parcourue.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un graphique volume-temps passe de 6 L à 2 L par une droite en 5 min. Donne le débit de sortie si rien n'entre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un graphique de température mesure 3 cm de haut entre les graduations 10 °C et 25 °C. Quel écart représente 1 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un niveau d'eau monte de plus en plus lentement alors que le débit entrant est constant. Le récipient s'élargit-il vers le haut ou se rétrécit-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une courbe de vitesse montre 4 m/s constants entre 3 et 10 s. Quelle distance est parcourue sur cet intervalle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une série de mesures suit une courbe de hauteur h(t) qui atteint son maximum en t = 4 s. Peut-on en déduire la valeur de ce maximum sans autre donnée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Fonctions au quotidien

Exercice 1

Fonction affine — Échelle de température (Celsius / Fahrenheit) : Aux États-Unis, la température T_F en degrés Fahrenheit (°F) est liée à la température T_C en degrés Celsius (°C) par la fonction affine :

$$f(x) = 1{,}8x + 32$$

1. Convertir en degrés Fahrenheit la température de fusion de la glace (0°C), la température d'un corps sain (37°C) et la température d'ébullition de l'eau (100°C).
2. Exprimer la fonction réciproque T_C en fonction de T_F, puis convertir 68°F en °C.
3. Existe-t-il une température pour laquelle les deux thermomètres affichent **exactement le même nombre** ($f(x) = x$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Fonction linéaire et affine — Étude d'un ressort (loi de Hooke) : On suspend différentes masses m (en grammes) à un ressort vertical et l'on mesure la **longueur totale** $L(m)$ (en cm) du ressort :

- à vide ($m = 0$ g) : $L(0) = 12{,}0$ cm ;
- avec $m = 100$ g : $L(100) = 14{,}5$ cm ;
- avec $m = 200$ g : $L(200) = 17{,}0$ cm.

1. Vérifier que $L(m)$ est une **fonction affine** et trouver son expression $L(m) = a \cdot m + b$ (dans la limite d'élasticité).
2. Que représente concrètement le coefficient a ? et le terme b ?
3. Quelle masse faut-il suspendre pour que le ressort atteigne une longueur totale de 22,0 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Fonction quadratique — Chute libre d'un objet : En négligeant les frottements de l'air, la distance d (en mètres) parcourue par une pierre lâchée sans vitesse initiale du haut d'une falaise en fonction du temps t (en secondes) est modélisée par la fonction :

$$d(t) = 5t^2$$

1. Calculer la distance parcourue après 1 s, 2 s, 3 s et 4 s. La distance est-elle proportionnelle au temps ?
2. On lâche la pierre dans un puits profond et l'on entend l'impact au fond après $t = 3{,}2$ s (en négligeant le temps de remontée du son). Quelle est la profondeur du puits ?
3. Combien de temps met une goutte d'eau pour tomber d'une falaise haute de 125 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Fonction quadratique — Distance d'arrêt d'un véhicule : Sur route sèche, la distance d'arrêt totale D (en mètres) d'une voiture roulant à la vitesse v (en km/h) est modélisée par :

$$D(v) = 0{,}28\,v + 0{,}005\,v^2$$

où $0{,}28\,v$ correspond à la distance parcourue pendant le *temps de réaction* ($\approx$ 1 s) et $0{,}005\,v^2$ à la *distance de freinage*.

1. Calculer la distance d'arrêt totale à 50 **km/h** (en ville) et à 100 **km/h** (sur route/autoroute).
2. Lorsque la vitesse passe de 50 km/h à 100 km/h (elle double), par quel facteur est multipliée la distance de freinage ? Et la distance d'arrêt totale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Fonction inverse — Loi des gaz parfaits (Boyle–Mariotte) : À température constante, la pression P (en bar) d'une certaine quantité d'air enfermée dans une seringue varie en fonction du volume V (en mL) selon la relation :

$$P(V) = \frac{60}{V}$$

1. Quelle est la pression lorsque le piston est placé à $V = 60$ mL (pression atmosphérique normale) ?
2. Compléter le tableau de valeurs pour $V \in \{15; 20; 30; 40; 120\}$ mL.
3. Quel volume faut-il atteindre pour que la pression monte à 5,0 bar ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Fonction trigonométrique — La grande roue : Une grande roue de fête foraine a un rayon de $R = 20$ m, et son centre se trouve à 22 m au-dessus du sol. Elle tourne à vitesse constante et effectue un tour complet en 60 **secondes**.

Un passager monte tout en bas à l'instant $t = 0$ s. Son altitude $h(t)$ (en mètres) est modélisée par la fonction trigonométrique :

$$h(t) = 22 - 20\cos\left(6^\circ \cdot t\right)$$

(où l'angle $6^\circ \cdot t$ est exprimé en degrés).

1. Calculer la hauteur du passager à $t = 0$ s, $t = 15$ s, $t = 30$ s et $t = 45$ s. *(Rappels :* $\cos(0^\circ) = 1$, $\cos(90^\circ) = 0$, $\cos(180^\circ) = -1$, $\cos(270^\circ) = 0$.*)*
2. À quels instants précis (entre 0 et 60 s) le passager se trouve-t-il à 32 **m** au-dessus du sol ? *(On donne* $\cos(120^\circ) = \cos(240^\circ) = -0{,}5$.*)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Fonction trigonométrique — Les marées dans un port : Dans un port de l'Atlantique, la hauteur d'eau $H(t)$ (en mètres) en fonction du temps t (en heures, avec $t = 0$ à minuit) est modélisée approximativement par :

$$H(t) = 4{,}5 + 2{,}5\sin\left(30^\circ \cdot t\right)$$

1. Quelle est la **période** T de cette marée (durée complète pour que l'angle augmente de 360°) ?
2. Quelles sont la **hauteur maximale** (marée haute) et la **hauteur minimale** (marée basse) de l'eau dans le port ?
3. Un bateau nécessitant au moins 5,75 **m** d'eau peut-il entrer dans le port entre 0 h et 12 h ? Préciser l'intervalle horaire autorisé *(on rappelle* $\sin(30^\circ) = \sin(150^\circ) = 0{,}5$*)*.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Fonction trigonométrique — Ombre et hauteur du Soleil : En un lieu donné, un mât vertical de hauteur $h = 6{,}0$ m projette sur le sol horizontal une ombre de longueur $L = \frac{h}{\tan(\alpha)}$, où α est l'angle d'élévation du Soleil au-dessus de l'horizon.

Valeurs utiles : $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$; $\tan(45°) = 1$; $\tan(60°) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

1. Calculer la longueur L de l'ombre du mât pour $\alpha = 30°$, $45°$ et $60°$.
2. Que devient L lorsque le Soleil est tout près de l'horizon ($\alpha \to 0°$) ? Et s'il était au zénith ($\alpha = 90°$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Fonction par paliers — Coût d'un envoi postal et parking : Un parking souterrain applique la tarification suivante (toute demi-heure commencée est due) :

- de 0 à 30 min inclus : **gratuit** (0 CHF) ;
- puis 1,50 **CHF** par tranche de 30 min commencée, plafonné à 12,00 **CHF** maximum par jour.

1. Calculer le prix payé pour un stationnement de 25 min, 45 min, 2 h 10 min et 6 h 00.
2. À partir de quelle durée de stationnement atteint-on le plafond journalier de 12,00 CHF ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Fonction exponentielle par doublements/divisions (demi-vie radioactive) : Un échantillon médical contient initialement $N_0 = 800$ millions de noyaux radioactifs d'iode-131, dont la **période (demi-vie)** vaut $T = 8$ jours : tous les 8 jours, la quantité restante est divisée par 2.

Le nombre de noyaux restants après t jours est donné par la fonction :

$$N(t) = 800 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8}$$

1. Calculer $N(t)$ pour $t = 0$, 8, 16, 24 et 32 jours.
2. Au bout de combien de jours restera-t-il moins de 10 millions de noyaux ? *(Donner le multiple de 8 jours juste supérieur, ou encadrer entre deux multiples de 8 jours.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un fournisseur d'électricité facture un abonnement de 15 CHF par mois, plus 0,25 CHF par kWh consommé.

1. Exprimer le montant $f(x)$ de la facture mensuelle en fonction de la consommation x (en kWh). De quel type de fonction s'agit-il ?
2. Calculer la facture pour 320 kWh.
3. Quelle consommation maximale permet un budget de 100 CHF ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Deux agences louent une camionnette pour une journée :

- Agence A : 50 CHF + 0,40 CHF par km ;
- Agence B : 80 CHF + 0,20 CHF par km.

1. Exprimer les prix $A(x)$ et $B(x)$ en fonction du nombre x de km.
2. Pour quelle distance les deux tarifs sont-ils égaux ?
3. Quelle agence choisir pour un trajet de 250 km ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On parcourt une distance de 120 km. La durée du trajet t (en heures) dépend de la vitesse moyenne v (en km/h).

1. Exprimer t en fonction de v. De quel type de fonction s'agit-il ?
2. Calculer la durée à 60, 80, 100 et 120 km/h.
3. Combien de minutes gagne-t-on en roulant à 120 km/h au lieu de 100 km/h ? Et à 80 au lieu de 60 km/h ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On place 1 000 CHF sur un compte rémunéré à 2 % par an (intérêts composés : les intérêts sont ajoutés au capital chaque année).

1. Calculer le capital après 1 an, puis après 2 ans.
2. Exprimer le capital $C(n)$ après n années.
3. Calculer le capital après 10 ans (au centime).
4. Comparer avec des intérêts simples (20 CHF par an).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une population de bactéries double toutes les 20 minutes. Au départ, il y en a 100.

1. Combien y en a-t-il après 1 heure ? Après 2 heures ?
2. Exprimer le nombre de bactéries $N(t)$ en fonction du nombre t de périodes de 20 min.
3. Au bout de combien de temps dépasse-t-on 100 000 bactéries ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

On lance une balle verticalement vers le haut. Sa hauteur (en m) après t secondes est $h(t) = 20t - 5t^2$.

1. Calculer $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$ et $h(4)$.
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte et à quel instant ?
3. Quand la balle retombe-t-elle au sol ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

L'indice de masse corporelle est IMC $= \frac{m}{T^2}$, où m est la masse en kg et T la taille en m.

On considère une personne de 1,70 m.

1. Exprimer l'IMC en fonction de la masse m. Quelle est la nature de cette fonction ?
2. Calculer l'IMC pour $m = 65$ kg (au dixième).
3. On considère qu'un IMC entre 18,5 et 25 correspond à une corpulence « normale ». Déterminer l'intervalle de masses correspondant (au kg près).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Pendant le temps de réaction d'un conducteur (environ 1 s), la voiture continue à rouler à vitesse constante.

1. Convertir 50 km/h et 120 km/h en m/s.
2. Exprimer la distance de réaction d_R (en m) en fonction de la vitesse v (en km/h).
3. Calculer d_R à 50 km/h et à 120 km/h.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

À 8 h, la batterie d'un téléphone est chargée à 100 %. À 11 h, elle n'est plus qu'à 64 %. On suppose que la décharge est régulière.

1. De combien de pourcents la batterie se décharge-t-elle par heure ?
2. Exprimer le niveau $B(t)$ en fonction du nombre d'heures t écoulées depuis 8 h.
3. À quelle heure la batterie sera-t-elle vide ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

L'intensité sonore perçue d'une source diminue avec la distance : elle est inversement proportionnelle au **carré** de la distance, $I(d) = \frac{k}{d^2}$.

À 1 m d'une enceinte, l'intensité vaut $I(1) = 100$ (unités arbitraires).

1. Déterminer k, puis calculer $I(2)$, $I(5)$ et $I(10)$.
2. Par combien l'intensité est-elle divisée quand on double la distance ?
3. À quelle distance l'intensité vaut-elle 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une carte de transport coûte 12 CHF, plus 2,40 CHF par trajet. Écris le coût C pour n trajets et calcule C(5).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un réservoir de 90 L se vide à 6 L/min. Donne la fonction volume avant vidange complète et sa durée de validité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une sonnette sonne toutes les 20 s à partir de t = 0. À quel instant sonne-t-elle pour la cinquième fois ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une borne affiche la température absolue selon K(T) = T + 273,15, avec T en °C. Convertis −10 °C.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un abonnement A facture 18 CHF fixes et 2 CHF par mois. B facture 6 CHF fixes et 5 CHF par mois. Après combien de mois les coûts sont-ils égaux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une masse est déduite d'un signal v par m(v) = 250v, en grammes. Quel signal correspond à 375 g ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un enregistrement coûte 8 CHF par gigaoctet commencé. Quel prix pour 2,1 Go ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

À vitesse constante de 72 km/h, donne la distance parcourue en t minutes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une animation perd 2 % de son amplitude à chaque cycle, en partant de 100 unités. Quelle amplitude au bout de deux cycles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une sonde donne toujours une température supérieure de 2 °C à la valeur réelle. Écris la fonction qui donne la valeur réelle à partir de l'affichage x.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Recherche de fonctions

Exercice 1

Suite de motifs géométriques (allumettes en ligne) : On construit une frise de **carrés accolés** avec des allumettes :

- Étape $n = 1$ (1 carré) : 4 allumettes.
- Étape $n = 2$ (2 carrés côte à côte) : 7 allumettes.
- Étape $n = 3$ (3 carrés côte à côte) : 10 allumettes.

1. Trouver la fonction $f(n)$ donnant le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n carrés accolés.
2. Combien d'allumettes faut-il pour 50 carrés ?
3. Avec une boîte de 250 allumettes, combien de carrés au maximum peut-on aligner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Grille d'allumettes carrée $n \times n$: Au lieu d'une seule ligne, on construit maintenant un grand carré quadrillé de dimension $n \times n$ (composé de n^2 petits carrés de 1 allumette de côté) :

- $n = 1$ (1×1) : 4 allumettes.
- $n = 2$ (2×2) : 12 allumettes.
- $n = 3$ (3×3) : 24 allumettes.

1. En comptant séparément les rangées **horizontales** et les colonnes **verticales** d'allumettes, établir la fonction $g(n)$ donnant le nombre total d'allumettes pour une grille $n \times n$.
2. Vérifier votre formule pour $n = 1, 2, 3$, puis calculer $g(10)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Le château de cartes : Pour construire un château de cartes à n étages :

- 1 étage : 2 cartes (un $\wedge$).
- 2 étages : 7 cartes (un $\wedge$ sur une barre horizontale reposant sur deux $\wedge$).
- 3 étages : 15 cartes.

1. Combien de cartes faut-il pour un château de 4 étages ?
2. En comptant le nombre de paires inclinées ($\wedge$) et le nombre de cartes horizontales à chaque étage, établir la formule générale $C(n)$ du nombre de cartes pour n étages.
3. Avec 2 jeux complets (104 cartes), quelle est la hauteur maximale (en étages) du château réalisable ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Motif géométrique en croix / escalier : On construit des croix symétriques à partir d'un carré central ($n = 0$: 1 carré) auquel on ajoute à chaque étape 1 carré au bout de chacune des 4 branches :

- $n = 0$: 1 carré
- $n = 1$: 5 carrés
- $n = 2$: 9 carrés

1. Donner la fonction $A(n)$ exprimant le nombre de carrés (d'aire 1 cm^2 chacun) à l'étape n.
2. Exprimer également le **périmètre** $P(n)$ de la figure obtenue à l'étape n (chaque carré a un côté de 1 cm).
3. À quelle étape n le périmètre atteint-il exactement 100 cm, et quelle est alors l'aire de la croix ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Empilement de boulets (pyramide à base carrée) : On empile des billes en une pyramide à base carrée : 1 bille au sommet, $4 = 2^2$ billes au 2e niveau, $9 = 3^2$ au 3e niveau, …, n^2 à la base.

1. Calculer le nombre total de billes $P(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Vérifier que la formule générale donnant la somme des n premiers carrés est :

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

en la testant pour $n = 4$ et $n = 5$, puis calculer le nombre de billes d'une pyramide de 12 étages.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Recherche de fonction à partir d'un tableau de valeurs (différences finies) : Lors d'une expérience, on relève les valeurs suivantes d'une fonction $f(n)$:

n	0	1	2	3	4
$f(n)$	3	6	11	18	27

1. Calculer les différences premières $f(n+1) - f(n)$, puis les différences secondes.
2. En déduire l'expression algébrique simple de $f(n)$ et prédire $f(10)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Problème d'optimisation (enclos contre un mur) : Un agriculteur dispose de 60 **m de clôture** pour délimiter un enclos rectangulaire adossé à un long mur rectiligne (le mur forme l'un des côtés du rectangle, donc la clôture ne sert que pour les 3 autres côtés).

On note x la longueur des deux côtés perpendiculaires au mur (en mètres).

1. Exprimer la longueur $L(x)$ du côté parallèle au mur en fonction de x, puis montrer que l'aire de l'enclos vaut :
$$\mathcal{A}(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$$
2. Compléter un tableau de valeurs pour $x \in \{5; 10; 12; 15; 18; 20; 25\}$.
3. Quelles dimensions donnent l'**aire maximale**, et quelle est cette aire ? *(Vérifier en écrivant $\mathcal{A}(x) = 450 - 2(x-15)^2$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Problème d'optimisation (boîte sans couvercle) : On prend une feuille cartonnée carrée de côté 18 cm. Dans chacun des 4 coins, on découpe un petit carré de côté x (avec $0 < x < 9$), puis on relève les 4 bords pour fabriquer une boîte parallélépipédique sans couvercle.

1. Exprimer en fonction de x les dimensions de la base carrée et la hauteur de la boîte, puis montrer que le volume vaut :
$$V(x) = x(18 - 2x)^2$$
2. Calculer $V(x)$ pour $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ cm.
3. Pour quelle valeur entière de x le volume est-il maximal ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Polygones et nombre d'intersections de droites : On trace dans un plan n droites en position générale (aucune paire n'est parallèle et jamais trois droites ne passent par le même point).

1. Compter le nombre maximal $I(n)$ de points d'intersection pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Expliquer pourquoi l'ajout d'une n^{e} droite crée exactement $n-1$ nouveaux points d'intersection, et en déduire la formule générale de $I(n)$.
3. Calculer le nombre maximal de régions $R(n)$ découpées dans le plan par ces n droites pour $n = 1, 2, 3, 4$, puis vérifier la formule $R(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème d'optimisation géométrique (chemin minimal par réflexion) : Une station de pompage P doit être construite sur la rive rectiligne d'un canal (l'axe des abscisses $y = 0$) pour alimenter deux villages situés du même côté du canal : $A(1; 3)$ et $B(9; 5)$ (unités en km).

On veut choisir la position $P(x; 0)$ sur la berge qui **minimise la longueur totale de tuyau** $f(x) = PA + PB$.

1. Construire le symétrique A' de A par rapport à la rive ($y = 0$). Expliquer pourquoi $PA + PB = PA' + PB$, et pour quelle position de P cette somme est **minimale**.
2. Calculer l'abscisse exacte x du point optimal $P(x; 0)$ ainsi que la longueur minimale $f(x_{\min})$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On donne le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	7	11	15	19

1. Calculer les différences entre deux valeurs consécutives de $f(x)$.
2. En déduire l'expression de $f(x)$.
3. Calculer $f(25)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On donne le tableau :

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	2	6	12	20	30

1. Calculer les différences premières, puis les différences secondes. Que remarque-t-on ?
2. Vérifier que $u(n) = n(n + 1)$.
3. Calculer $u(10)$ et trouver n tel que $u(n) = 132$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Les **nombres triangulaires** comptent les points d'un triangle : $T(1) = 1$, $T(2) = 3$, $T(3) = 6$, $T(4) = 10$ (on ajoute une rangée de n points à chaque étape).

1. Calculer $T(5)$ et $T(6)$.
2. En accolant deux triangles identiques pour former un rectangle, montrer que $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Combien de points compte le triangle de 100 rangées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On entoure un carré de $n \times n$ carreaux blancs d'une bordure d'une rangée de carreaux gris.

1. Combien de carreaux gris faut-il pour $n = 1$, 2, 3 ?
2. Trouver une formule $G(n)$ et la justifier de deux manières.
3. Pour quelle valeur de n faut-il 100 carreaux gris ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une bougie mesure 20 cm. Deux heures après l'avoir allumée, elle ne mesure plus que 14 cm. On suppose qu'elle se consume régulièrement.

1. Trouver l'expression de la longueur $L(t)$ (en cm) en fonction du temps t (en h).
2. Quelle est sa longueur après 5 h ?
3. Au bout de combien de temps sera-t-elle entièrement consumée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Lors d'une expérience, on relève :

x	1	2	3	4	6
y	12	6	4	3	2

1. Les différences sont-elles constantes ? Le quotient $\frac{y}{x}$?
2. Calculer le produit $x \times y$ pour chaque colonne. Conclure.
3. Donner un exemple de situation physique décrite par ce type de relation.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On donne :

n	0	1	2	3	4
$v(n)$	3	6	12	24	48

1. Les différences sont-elles constantes ? Et les quotients $\frac{v(n+1)}{v(n)}$?
2. Trouver l'expression de $v(n)$.
3. Calculer $v(10)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On cherche le rectangle d'aire 36 cm^2 dont le périmètre est le plus petit possible.

1. En notant x la longueur d'un côté, exprimer l'autre côté puis le périmètre $P(x)$.
2. Compléter un tableau pour $x = 1, 2, 3, 4, 6, 9$.
3. Quel rectangle convient ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Dans un groupe de n personnes, chacune serre la main de toutes les autres une seule fois. On note $p(n)$ le nombre de poignées de main.

1. Compléter : $p(1) = 0$, $p(2) = 1$, $p(3) = 3$, $p(4)$, $p(5)$.
2. Observer les différences et en déduire une méthode de calcul de $p(n + 1)$ à partir de $p(n)$.
3. Vérifier que $p(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ convient et calculer $p(30)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On compte le nombre total de carrés (de toutes tailles) dans une grille de $n \times n$ petits carrés : $S(1) = 1$, $S(2) = 5$, $S(3) = 14$, $S(4) = 30$.

1. Expliquer pourquoi $S(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.
2. Calculer $S(5)$ et $S(8)$ (le nombre de carrés d'un échiquier).
3. Vérifier la formule $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n = 4$ et $n = 8$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une fonction affine vérifie f(2) = 11 et f(5) = 23. Trouve sa règle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une suite augmente de 7 à chaque étape et vaut 12 à l'étape 1. Donne son terme à l'étape n $\geq$ 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une rangée de n hexagones identiques a exactement un côté commun entre voisins et aucune autre arête commune. Combien d'arêtes distinctes dessine-t-on, côtés partagés inclus ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un motif carré de n lignes et n colonnes contient un point à chaque emplacement. Combien de points supplémentaires entre les étapes n et n + 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une suite part de 9 à l'étape zéro et triple à chaque étape. Écris la formule au rang n.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une fonction affine vaut 21 en 0 et 9 en 4. Donne son zéro.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une boîte contient une grille de n rangées de n objets, sauf les n positions d'une diagonale qui sont vides. Donne le nombre d'objets.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Une fonction de la forme f(x) = ax² passe par (3, 27). Quel est a ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Les trois couples (1, 4), (2, 7), (3, 10) suffisent-ils à garantir qu'une fonction quelconque est affine sur tous les réels ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une grille rectangulaire a n colonnes et n + 2 rangées. Donne son nombre de cases sous forme développée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Fractales

Exercice 1

Courbe de von Koch (longueur d'un seul côté) : On part à l'étape 0 d'un segment de longueur $L_0 = 1$ m. À chaque étape, on divise chaque segment en 3 tiers égaux et l'on remplace le tiers central par les deux autres côtés d'un triangle équilatéral pointant vers l'extérieur (on passe donc de 1 segment à 4 segments 3 fois plus courts).

1. Calculer le nombre de segments N_n, la longueur ℓ_n d'un segment et la longueur totale L_n de la ligne brisée pour $n = 0, 1, 2, 3$.
2. Exprimer L_n en fonction de n, et expliquer ce qui arrive à la longueur L_n lorsque n tend vers l'infini.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Le flocon de von Koch — Périmètre infini mais aire finie !

On part d'un triangle équilatéral de côté $c = 9$ cm et d'aire $\mathcal{A}_0$. On applique la transformation de von Koch simultanément à ses 3 **côtés**.

1. Quel est le périmètre P_0 à l'étape 0, puis P_1 et P_2 aux étapes 1 et 2 ? Donner la formule de P_n.
2. En exprimant l'aire de chaque petit triangle ajouté à l'étape 1 (côté $\frac{1}{3}$ du côté initial, donc aire $\frac{1}{9}\mathcal{A}_0$), calculer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ en fonction de $\mathcal{A}_0$.
3. Sachant que la somme géométrique infinie $1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots$ vaut $\frac{1}{1-4/9} = \frac{9}{5}$, calculer l'**aire limite** $\mathcal{A}_\infty$ du flocon en fonction de $\mathcal{A}_0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Triangle de Sierpiński : On part d'un triangle équilatéral plein T_0 d'aire $\mathcal{A}_0 = 64$ cm^2 et de périmètre $P_0 = 24$ cm (étape 0). À chaque étape, dans chaque triangle plein restant, on relie les milieux des 3 côtés et l'on **retire** le triangle central (il reste donc 3 triangles pleins deux fois plus petits).

1. Combien de triangles pleins restent à l'étape 1, 2, 3 et à l'étape n ?
2. Calculer l'aire restante $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et la formule générale $\mathcal{A}_n$. Vers quoi tend l'aire lorsque $n \to +\infty$?
3. Calculer la somme des périmètres de tous les triangles pleins restants à l'étape 1, 2 et n. Vers quoi tend ce périmètre total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Le tapis de Sierpiński : On part d'un carré plein d'aire $\mathcal{A}_0 = 1$ m^2. À l'étape 1, on le découpe en 9 carrés identiques (3×3) et l'on retire le carré central. À l'étape 2, on répète l'opération dans chacun des 8 carrés pleins restants, et ainsi de suite.

1. Quelle fraction de l'aire initiale reste-t-il après 1 étape ? après 2 étapes ? après n étapes ?
2. Combien de trous (carrés retirés) ont été percés au total après 3 étapes ?
3. Calculer l'aire restante à l'étape 5 (en m^2, arrondie au millième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

L'ensemble de Cantor (poussière de Cantor) : On part à l'étape 0 d'un segment $[0;1]$ de longueur $L_0 = 1$. À chaque étape, on retire le tiers central ouvert de chaque segment restant (à l'étape 1, on garde $[0;\frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3};1]$).

1. Calculer le nombre de segments et la longueur totale restante L_n aux étapes $1, 2, 3$ et n.
2. Quelle est la somme des longueurs des segments **retirés** à l'infini ?
3. Donner deux exemples de points qui ne sont **jamais retirés** (même à l'infini), et expliquer pourquoi le point $\frac{1}{4}$ reste toujours dans l'ensemble de Cantor *(indice : observer que* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$*, ou son écriture en base* 3*).*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

L'éponge de Menger (fractale en 3D) : C'est l'analogue en 3 dimensions du tapis de Sierpiński. On part d'un cube plein de côté 1 m (volume $V_0 = 1$ m^3). À l'étape 1, on le divise en 27 petits cubes ($3 \times 3 \times 3$) et l'on retire les 6 cubes au centre des 6 faces ainsi que le 1 cube central (soit 7 **cubes retirés** sur 27).

1. Combien de petits cubes pleins restent à l'étape 1 ? Quelle fraction du volume reste-t-il ?
2. On répète l'opération sur chacun des cubes restants. Quel est le nombre de cubes pleins et le volume restant V_n à l'étape n ?
3. Montrer que l'**aire totale des surfaces** de l'éponge tend vers $+\infty$ alors que son volume tend vers 0 (à l'étape 1, calculer l'aire extérieure + intérieure des tunnels).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

L'arbre de Pythagore (fractale et théorème de Pythagore) : On part d'un carré C_0 d'aire $\mathcal{A}_0 = 1$ m^2 (étape 0). Sur son côté supérieur, on construit un triangle rectangle isocèle dont ce côté est l'hypoténuse, puis on construit deux carrés C_1 sur les deux petits côtés du triangle rectangle (étape 1), et l'on répète indéfiniment.

1. D'après le théorème de Pythagore, quelle est la **somme des aires** des deux carrés ajoutés à l'étape 1 ?
2. Quelle est l'aire totale ajoutée à l'étape 2 (les 4 nouveaux carrés) et à l'étape n (les 2^n nouveaux carrés) ?
3. Pourquoi l'aire de tous ces carrés (sans compter les éventuels chevauchements tardifs) diverge-t-elle vers $+\infty$ si l'on compte l'aire ajoutée à chaque niveau, alors que la figure reste pourtant contenue dans un rectangle fini ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Antenne fractale et dimension fractale : Pour loger une longue antenne radio dans un téléphone portable compact, on utilise une géométrie fractale (comme la courbe de von Koch ou une courbe quadratique de Koch).

Pour une courbe fractale auto-similaire constituée de N **copies** identiques de taille réduite d'un facteur r (ex. pour un segment : $N = 2$ moitiés de facteur $r = 2$; pour un carré : $N = 4$ quarts de facteur $r = 2$), on définit la **dimension fractale** D par :

$$N = r^D$$

1. Vérifier que pour un segment ($N = 3, r = 3$) on trouve $D = 1$, et pour un carré ($N = 9, r = 3$) on trouve $D = 2$.
2. Quelle relation $r^D = N$ vérifie la **courbe de von Koch** ($N = 4$ copies réduites d'un facteur $r = 3$) ? Sa dimension D est-elle comprise entre 1 et 2 ? *(Tester $D = 1$, $D = 1{,}26$ et $D = 2$ sachant que $3^{1{,}26} \approx 3{,}99$.)*
3. Quelle est la dimension fractale d'un **triangle de Sierpiński** ($N = 3$ copies réduites d'un facteur $r = 2$, avec $2^{1{,}585} \approx 3$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

La fractale du chou romanesco / spirale et carré de Koch : On considère une fractale obtenue à partir d'un carré de côté $L_0 = 8$ cm : à chaque étape, sur le tiers central de chaque côté, on construit extérieurement un **petit carré** de côté divisé par 3 (on remplace donc 1 segment par 5 **segments** de longueur $\frac{1}{3}$).

1. Quelle est la longueur totale du contour P_n aux étapes $n = 0, 1, 2$ et à l'étape n ?
2. Quelle est l'aire ajoutée à l'étape 1 et à l'étape 2 en fonction de l'aire initiale $\mathcal{A}_0 = 64$ cm^2 ?
3. L'aire totale à l'infini est-elle finie ou infinie ? *(Utiliser la formule de la somme géométrique $1+q+q^2+\cdots = \frac{1}{1-q}$ pour $|q| < 1$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Courbe du dragon (pliage d'une bande de papier) : On prend une bande de papier et on la plie en deux toujours dans le même sens :

- 1 pli : 1 pli (creux), soit 2 segments.
- 2 plis : 3 plis, soit 4 segments.
- 3 plis : 7 plis, soit 8 segments.

Lorsqu'on déplie la bande à angles droits (90° à chaque pli), on obtient les premières itérations de la *fractale du dragon*.

1. Donner la formule du nombre de segments S_n et du nombre de plis P_n après n pliages.
2. À chaque pliage, l'épaisseur totale de la bande pliée double (épaisseur initiale d'une feuille : $e_0 = 0{,}1$ mm). Quelle épaisseur atteindrait-on théoriquement après 10 pliages ? Après 42 pliages ? *(On donne $2^{10} = 1\,024$ et $2^{42} \approx 4{,}4 \times 10^{12}$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Courbe de von Koch : à chaque étape, chaque segment est remplacé par 4 segments de longueur $\frac{1}{3}$ de l'original. On part d'un segment de 1 m.

1. Calculer la longueur de la courbe aux étapes 1, 2, 3 et 4 (au millième).
2. Exprimer la longueur L_n à l'étape n.
3. À partir de quelle étape la longueur dépasse-t-elle 10 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Triangle de Sierpiński : à chaque étape, on divise chaque triangle plein en 4 triangles égaux (en joignant les milieux des côtés) et on retire celui du centre.

1. Combien de triangles pleins y a-t-il aux étapes 1, 2, 3 ? À l'étape n ?
2. Quelle fraction de l'aire initiale reste-t-il à l'étape n ? Calculer pour $n = 5$ (au millième).
3. Que devient l'aire lorsque n devient très grand ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Ensemble de Cantor : on part du segment $[0; 1]$. À chaque étape, on retire le tiers central de chaque segment restant.

1. À l'étape 4, combien y a-t-il de segments, quelle est la longueur de chacun et la longueur totale ?
2. Quelle longueur a-t-on retirée au total après 4 étapes ?
3. Le point $\frac{1}{3}$ est-il retiré à un moment donné ? Et le point $\frac{1}{2}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On dessine un arbre fractal : un tronc de 1 m se divise en 2 branches, chacune de longueur égale à la **moitié** de la précédente ; chaque branche se divise à son tour en 2, etc.

1. Calculer la longueur totale ajoutée à chaque niveau (niveaux 1, 2, 3).
2. Quelle est la longueur totale de l'arbre après n niveaux de branches ?
3. Que se passe-t-il si chaque branche mesure 0,6 fois la précédente ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une figure fractale est formée de N copies d'elle-même réduites d'un facteur k. Sa **dimension** D vérifie $k^D = N$.

1. Vérifier la formule pour un segment (2 copies réduites de moitié), un carré (4 copies réduites de moitié) et un cube (8 copies réduites de moitié).
2. Pour la courbe de von Koch (4 copies réduites d'un facteur 3), encadrer D entre deux nombres à un dixième près en testant $3^{1,2}$ et $3^{1,3}$ à la calculatrice.
3. Faire de même pour le triangle de Sierpiński (3 copies réduites de moitié).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

L'éponge de Menger : on divise un cube en 27 petits cubes égaux et on retire le cube central ainsi que les 6 cubes au centre de chaque face. On recommence avec chaque petit cube restant.

1. Combien de petits cubes restent après l'étape 1 ? Après l'étape 3 ?
2. Quelle fraction du volume initial reste-t-il après l'étape 3 (au millième) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Fractale de Vicsek : on part d'un carré de côté 1. On le divise en 9 carrés égaux et on garde seulement les 4 carrés des coins et le carré central (on obtient une croix en X). On recommence sur chaque carré gardé.

1. Combien de carrés y a-t-il à l'étape n ? Quelle est l'aire totale ?
2. Calculer l'aire à l'étape 3 (au millième).
3. Calculer la dimension D (avec $3^D = 5$) à l'aide d'essais à la calculatrice (au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Flocon de von Koch : on part d'un triangle équilatéral de côté 9 cm et on applique la construction de von Koch sur chacun des 3 côtés.

1. Combien de côtés le flocon possède-t-il aux étapes 1, 2 et 3 ?
2. Quelle est la longueur d'un côté à l'étape 3 ?
3. Calculer le périmètre à l'étape 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On écrit les premières lignes du triangle de Pascal (chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus) et on colorie les nombres **impairs**.

1. Écrire les lignes 0 à 7.
2. Compter les nombres impairs dans chaque ligne, puis au total dans les 8 lignes.
3. Quelle figure fractale apparaît ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Le paradoxe de la côte : on mesure la longueur d'une côte rocheuse avec des « règles » de plus en plus petites.

- Avec une règle de 100 km : 1 000 km
- Avec une règle de 10 km : 1 500 km
- Avec une règle de 1 km : 2 250 km

1. Par quel nombre la longueur mesurée est-elle multipliée à chaque fois que l'on divise la règle par 10 ?
2. Prédire la mesure avec une règle de 100 m.
3. Pourquoi peut-on dire que la longueur d'une côte « n'existe pas » vraiment ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On commence par un segment, puis à chaque étape chaque segment conservé est remplacé par deux segments de longueur un tiers de la sienne. Combien reste-t-il de segments après quatre étapes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un carré unité est divisé en neuf carrés égaux. On conserve huit carrés, puis on répète le procédé dans chacun. Quelle fraction de l'aire reste après deux étapes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Dans le triangle de Sierpiński, chaque triangle conservé donne trois triangles de côté moitié. Quel est le facteur de réduction de l'aire totale par étape ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une figure est remplacée à chaque étape par quatre copies réduites. Après trois étapes, combien de copies élémentaires apparaissent si l'on part d'une seule figure ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un arbre idéal commence par une branche de 12 cm. Les branches des générations suivantes mesurent chacune la moitié de la génération précédente. Quelle longueur à la génération 4 si la branche initiale est la génération 0 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On construit une ligne brisée en remplaçant chaque segment par cinq segments d'un tiers de sa longueur. Que devient la longueur totale à chaque étape ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une construction conserve quatre carrés de côté un tiers du carré parent. Quelle aire reste après une étape à partir de 81 cm² ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Après deux étapes, un motif contient 25 copies à partir d'une seule figure. Le même nombre de copies est produit par chaque figure à chaque étape. Quel est ce nombre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Dans le jeu du chaos, on remplace le point P(8, 2) par le milieu entre P et le sommet A(2, 6). Quelle est sa nouvelle position ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une construction part d'un segment de 81 cm. Chaque étape remplace chaque segment par deux segments de longueur un tiers. Quelle est la longueur totale à l'étape 3 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Polyèdres et perspective

Exercice 1

Règles de la perspective cavalière : On souhaite dessiner en perspective cavalière un pavé droit $ABCDEFGH$ de longueur $AB = 6$ cm (face avant), de hauteur $AD = 4$ cm et de profondeur $AE = 4$ cm, avec un angle de fuite $\alpha = 45^\circ$ vers le haut à droite et un coefficient de réduction $k = 0{,}5$.

1. Rappeler les trois propriétés fondamentales conservées par la perspective cavalière (faces frontales, parallélisme, milieux).
2. Quelle longueur exacte doit-on mesurer sur le papier pour tracer les arêtes fuyantes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$?
3. En supposant la face frontale $ABCD$ devant et le point de vue légèrement au-dessus et à droite, quelles sont les 3 **arêtes cachées** à tracer en pointillés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Perspective cavalière d'une pyramide régulière : On veut représenter en perspective cavalière une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de côté 4 cm et de hauteur $SO = 5$ cm (O étant le centre du carré $ABCD$), avec $\alpha = 30^\circ$ et $k = 0{,}5$.

1. Quelle figure géométrique représente la base carrée $ABCD$ sur le dessin en perspective cavalière ?
2. Expliquer comment placer exactement le pied O de la hauteur sur le dessin, puis le sommet S.
3. En supposant la face SAB orientée vers l'avant et le point de vue au-dessus et à droite, quelles arêtes sont cachées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Les 5 solides de Platon et la relation d'Euler : Un polyèdre est dit *régulier (solide de Platon)* si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques et si chaque sommet appartient au même nombre de faces.

1. Compléter le tableau suivant des 5 solides de Platon et vérifier pour chacun la **relation d'Euler** ($S-A+F = 2$, où S = sommets, A = arêtes, F = faces) :

Solide de Platon	Forme des faces	F	S	A
Tétraèdre régulier	Triangle équilatéral	4	?	6
Cube (hexaèdre)	Carré	6	8	?
Octaèdre régulier	Triangle équilatéral	8	?	12
Dodécaèdre régulier	Pentagone régulier	12	20	?
Icosaèdre régulier	Triangle équilatéral	20	?	30

2. Quel solide est le **dual** du cube (obtenu en reliant les centres de ses 6 faces) ? Et le dual du dodécaèdre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Preuve qu'il n'existe que 5 solides de Platon : Pour former un sommet solide convexe en 3D, il faut réunir au moins $k \geq 3$ **faces** autour d'un sommet, et la **somme des angles** des faces autour de ce sommet doit être **strictement inférieure à** 360° (à 360°, les faces s'aplatiraient dans un plan).

1. Tester les faces en **triangles équilatéraux** ($\alpha_3 = 60^\circ$) : quelles valeurs de $k \geq 3$ vérifient $k \times 60^\circ < 360^\circ$? À quels solides de Platon correspondent-elles ?
2. Tester les **carrés** ($\alpha_4 = 90^\circ$), les **pentagones réguliers** ($\alpha_5 = 108^\circ$) et les **hexagones réguliers** ($\alpha_6 = 120^\circ$). Pourquoi est-il impossible de construire un solide de Platon avec des hexagones ou plus ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Patrons du cube : Un cube possède exactement 11 **patrons distincts** (à rotation et symétrie près) composés de 6 carrés collés bord à bord.

1. Parmi les dispositions suivantes sur quadrillage, indiquer celles qui **forment un cube** après pliage et celles qui **échouent** (en précisant pourquoi) :
   - **(P1)** 4 carrés en ligne horizontale, avec 1 carré au-dessus du 2e et 1 carré au-dessous du 3e (patron en « T / croix »).
   - **(P2)** 6 carrés disposés en 2 rangées de 3 (un rectangle 3×2).
   - **(P3)** 5 carrés en ligne horizontale et 1 carré au-dessus du 3e.
   - **(P4)** 3 carrés en ligne (colonne 1 à 3 sur la ligne 1), puis 3 carrés décalés (colonne 3 à 5 sur la ligne 2 : forme en « escalier »).
2. Sur un dé cubique classique (patron en croix P1 : colonne centrale de 4 faces de haut en bas portant $1, 2, 3, 4$, face gauche portant 5 et face droite portant 6 à côté du 2), la somme de deux faces opposées vaut-elle 7 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Patrons de l'octaèdre et du tétraèdre réguliers :

1. Un **tétraèdre régulier** est formé de 4 triangles équilatéraux. Quels sont ses 2 **seuls patrons possibles** (en reliant 4 triangles équilatéraux bord à bord) ?
2. Un **octaèdre régulier** possède 8 faces triangulaires équilatérales. Expliquer comment vérifier qu'un patron candidat composé de 8 triangles équilatéraux est valide, et dessiner mentalement le patron simple en « bande alternée » (6 triangles en bande alternée haut/bas + 1 triangle en haut et 1 en bas). Quel est son périmètre si chaque arête mesure 4 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Le ballon de football (icosaèdre tronqué — solide d'Archimède) : Un ballon de football classique est un **icosaèdre tronqué**, obtenu en coupant les 12 sommets d'un icosaèdre régulier (qui avait 20 faces triangulaires, 30 arêtes et 12 sommets) au tiers de chaque arête.

1. Quelle est la forme des 12 nouvelles faces créées à la place des 12 sommets coupés ? Et quelle nouvelle forme prennent les 20 anciennes faces triangulaires ?
2. Calculer le nombre total de faces F, d'arêtes A et de sommets S du ballon de football, puis vérifier la relation d'Euler $S - A + F = 2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Prismes et pyramides — Relations générales : On considère un prisme droit et une pyramide ayant tous deux pour base un polygone convexe à n **côtés** ($n \geq 3$).

1. Exprimer en fonction de n le nombre de faces F, de sommets S et d'arêtes A :
   - du prisme à base n-gonale ;
   - de la pyramide à base n-gonale.
2. Vérifier la formule d'Euler $S - A + F = 2$ dans les deux cas.
3. Quel prisme ou quelle pyramide possède exactement 18 **arêtes** ? Combien a-t-il alors de sommets et de faces ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Volume et perspective d'un prisme tronqué / tétraèdre dans le cube : On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 6$ cm (face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$ avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.).

On découpe le « coin » formé par la pyramide triangulaire (tétraèdre) $BEFG$ de sommet B et de base EFG.

1. Quelle est la nature exacte des 4 faces du tétraèdre $BEFG$? (Justifier sans calcul compliqué.)
2. Calculer le **volume** de ce tétraèdre $BEFG$ (en prenant EFG pour base et $[BF]$ pour hauteur), puis le volume du solide restant.
3. Quelle fraction du cube représente ce coin coupé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de géométrie dans l'espace (fourmi sur un cube) : Une fourmi se déplace sur les faces extérieures d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 10$ cm (base $ABCD$ au sol, $EFGH$ au plafond avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D).

Elle part du sommet A (sol, avant-gauche) pour rejoindre le sommet diamétralement opposé G (plafond, arrière-droit) en restant toujours à la surface du cube.

1. Quelle distance parcourrait-elle si elle suivait uniquement les arêtes ?

2. En **dépliant le patron** des deux faces traversées (par exemple la face avant $ABFE$ et la face droite $BCGF$, ou la face avant et le plafond $EFGH$), tracer le plus court chemin sur le patron et calculer sa **longueur exacte**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Compléter le tableau des cinq solides de Platon et vérifier la relation d'Euler $F + S - A = 2$:

Solide	F	S	A
Tétraèdre	4		6
Cube	6	8	
Octaèdre	8		12
Dodécaèdre	12	20	
Icosaèdre	20		30

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un icosaèdre régulier a 20 faces triangulaires ; en chaque sommet se rejoignent 5 faces.

1. En comptant les côtés de toutes les faces, déterminer le nombre d'arêtes.
2. En comptant les coins de toutes les faces, déterminer le nombre de sommets.
3. Faire de même pour le dodécaèdre (12 faces pentagonales, 3 faces par sommet).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On tronque un cube en coupant chacun de ses 8 coins (cube tronqué) : chaque coin coupé devient un triangle et chaque face carrée devient un octogone.

1. Combien le solide a-t-il de faces ?
2. Combien a-t-il de sommets ? (Chaque coin coupé crée 3 nouveaux sommets.)
3. En déduire le nombre d'arêtes par la relation d'Euler, puis vérifier par un autre calcul.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On dessine un cube de 4 cm d'arête en perspective cavalière (fuyantes inclinées à 45°, coefficient de réduction 0,5).

1. Quelles arêtes sont dessinées en vraie grandeur ? Quelle est la longueur des arêtes fuyantes sur le dessin ?
2. Les angles droits de la face avant apparaissent-ils comme des angles droits ? Et ceux des faces latérales ?
3. Deux arêtes parallèles du cube restent-elles parallèles sur le dessin ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un cube a une arête de 6 cm.

1. Calculer la longueur d'une diagonale d'une face (valeur exacte et au centième).
2. Calculer la longueur d'une grande diagonale du cube (reliant deux sommets opposés).
3. Pour un cube d'arête a, exprimer ces deux longueurs en fonction de a.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm (face inférieure $ABCD$, E au-dessus de A), on considère la pyramide $EABD$.

1. Quelle est la nature de sa base ABD ? Calculer son aire.
2. Calculer le volume de la pyramide ($V = \frac{1}{3} \times$ base $\times$ hauteur).
3. Quelle fraction du volume du cube représente-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On construit le **dual** d'un polyèdre en plaçant un point au centre de chaque face, puis en reliant les centres de deux faces voisines.

1. Quel solide obtient-on à partir d'un cube ? Justifier en comptant ses sommets et ses faces.
2. Quel est le dual d'un tétraèdre régulier ?
3. Que deviennent les nombres F, S et A quand on passe d'un solide à son dual ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Une fourmi se trouve sur un sommet d'un cube d'arête 1 m et veut atteindre le sommet opposé en marchant sur la surface.

1. Quelle distance parcourt-elle en suivant les arêtes ?
2. En dépliant deux faces voisines dans un même plan, déterminer le plus court chemin (valeur exacte et au centimètre).
3. Pourquoi le chemin le plus court ne passe-t-il pas par la grande diagonale du cube ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un assemblage de cubes identiques posé sur une grille 2×2 a les trois vues suivantes :

- vue de dessus : un carré 2×2 entièrement rempli ;
- vue de face : un carré 2×2 entièrement rempli ;
- vue de côté : un carré 2×2 entièrement rempli.

1. Quel est le nombre maximal de cubes ?
2. Quel est le nombre minimal de cubes ? Décrire une disposition.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On coupe un cube d'arête a par un plan passant par trois sommets voisins d'un même sommet S (les extrémités des trois arêtes issues de S).

1. Quelle est la nature de la section ? Calculer la longueur de ses côtés.
2. Quel solide a-t-on détaché ? Calculer son volume en fonction de a.
3. Peut-on obtenir un hexagone régulier comme section d'un cube ? Si oui, comment ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un prisme à base pentagonale a combien de faces, sommets et arêtes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un octaèdre est formé de deux pyramides à base carrée accolées par leur base. Combien de faces externes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un solide convexe a 8 sommets et 12 arêtes. Calcule le nombre de faces avec la relation d'Euler.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une arête fuyante mesure 9 cm et le coefficient de fuite est 2/3. Quelle longueur tracer en perspective cavalière ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Dans une perspective cavalière, comment représenter deux arêtes parallèles de profondeur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien d'arêtes du tétraèdre relient un sommet choisi aux trois autres ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un polyèdre convexe a 6 faces triangulaires. Combien d'arêtes compte-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Dans un dessin de pavé, quelle convention distingue les arêtes cachées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Le dessin en perspective cavalière donne 4 cm pour une arête fuyante avec coefficient 1/2. Retrouve la profondeur réelle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un tétraèdre a quatre faces. Pourquoi un cylindre ne rentre-t-il pas dans la même famille de solides ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Divers points de vue

Exercice 1

Empilement de cubes et grille des hauteurs : Sur un plateau carré 3×3 orienté selon les points cardinaux (**Nord** en haut, **Sud** en bas, **Ouest** à gauche, **Est** à droite), on empile des cubes unités ($1 \times 1 \times 1$). La grille ci-dessous indique le **nombre de cubes empilés** sur chaque case :

	O	Centre	E
Nord	3	1	2
Milieu	2	3	0
Sud	1	2	1

1. Combien de cubes composent cet assemblage au total ?
2. Donner la **silhouette (hauteur maximale par colonne)** visible lorsque l'on regarde l'assemblage :
   - depuis le **Sud** (vue de face, de gauche à droite = Ouest à Est) ;
   - depuis l'**Est** (vue de profil droite, de gauche à droite = Sud à Nord) ;
   - depuis le **Nord** (de gauche à droite = Est à Ouest).
3. Comment apparaît la **vue de dessus** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Nombre minimal et maximal de cubes à partir de 3 vues : On observe un empilement de cubes posés sur une grille 3×3 selon trois vues orthogonales :

- **Vue de dessus :** toutes les 9 cases contiennent au moins 1 cube.
- **Vue du Sud (de face, Ouest $\to$ Est) :** hauteurs $(1; 3; 2)$.
- **Vue de l'Est (de droite, Sud $\to$ Nord) :** hauteurs $(2; 3; 1)$.

1. Donner la grille réalisant le **nombre maximal** de cubes compatibles avec ces trois vues, et calculer ce maximum.
2. Donner une grille réalisant le **nombre minimal** de cubes compatibles avec ces trois vues, et calculer ce minimum.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Points cardinaux et lecture de paysage (bâtiments vus de divers côtés) : Quatre tours de hauteurs différentes sont disposées aux 4 coins d'une place carrée :

- coin **Nord-Ouest** : tour A de 40 **m** ;
- coin **Nord-Est** : tour B de 25 **m** ;
- coin **Sud-Ouest** : tour C de 20 **m** ;
- coin **Sud-Est** : tour D de 35 **m**.

Un photographe se tient loin de la place et prend quatre clichés horizontaux. Pour chaque direction, indiquer dans quel ordre (de **gauche à droite**) apparaissent les tours, et préciser si l'une d'elles est **entièrement cachée** derrière une autre :

1. Photographie prise depuis le **Sud** (en regardant vers le Nord).
2. Photographie prise depuis l'**Est** (en regardant vers l'Ouest).
3. Photographie prise depuis le **Nord-Est** (en regardant exactement selon la diagonale vers le Sud-Ouest).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Correspondance entre un solide et ses 3 projections orthogonales : On considère un cube de côté 6 cm auquel on a retiré un **quart de cylindre**… non, un **coin prismatique triangulaire** sur toute la hauteur (ou un escalier en L : un pavé $6 \times 6 \times 6$ auquel on retire le bloc supérieur avant de dimension $6 \times 3 \times 3$, formant une marche « L »).

Plus précisément, le solide est un bloc 6 cm (largeur Ouest–Est) $\times$ 6 cm (profondeur Sud–Nord) $\times$ 6 cm (hauteur) dont on a retiré en haut au **Sud** un bloc de largeur 6 cm, de profondeur 3 cm et de hauteur 3 cm.

Décrire avec précision (contour, dimensions et éventuels traits intérieurs pleins ou pointillés) :

1. La **vue de face** (depuis le Sud).

2. La **vue de dessus**.
3. La **vue de profil droit** (depuis l'Est).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Identifier un solide à partir de ses trois vues orthogonales : Un solide géométrique simple a exactement les trois projections orthogonales suivantes :

- **Vue de face :** un triangle isocèle de base 6 cm et de hauteur 8 cm.
- **Vue de profil gauche :** un triangle isocèle de base 6 cm et de hauteur 8 cm.
- **Vue de dessus :** un disque de diamètre 6 cm avec un point marqué en son centre.

1. Quel est ce solide ?
2. Quel solide différent aurait la **même vue de face et la même vue de profil**, mais une vue de dessus en forme de **carré de** 6 **cm de côté avec ses deux diagonales tracées** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Solides percés et arêtes cachées (pointillés) : On prend un cube plein de 6 cm d'arête et l'on perce de part en part (de la face avant à la face arrière) un **tunnel cylindrique centré** de diamètre 2 cm (rayon 1 cm).

1. Dessiner/décrire la **vue de face**.
2. Décrire la **vue de dessus** et la **vue de profil droit**, en indiquant précisément où se trouvent les traits en **pointillés**.
3. Quel est le volume de matière restant ? *(Donner la valeur exacte en fonction de π, puis arrondir au dixième de cm^3.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Rotation d'un dé dans l'espace : On pose un dé cubique standard (la somme de deux faces opposées vaut toujours 7) sur une table. Au départ :

- la face du **dessus** vaut 1 ;
- la face tournée vers le **Sud** vaut 2 ;
- la face tournée vers l'**Est** vaut 3.

On fait rouler le dé sans glisser (basculements de 90° autour d'une arête au sol) dans l'ordre suivant :

1. 1 **quart de tour vers l'Est** ;
2. 1 **quart de tour vers le Nord** ;
3. 1 **quart de tour vers l'Ouest**.

Quelles valeurs se trouvent finalement sur la face du **dessus**, sur la face **Sud** et sur la face **Est** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Vues orthogonales et surface extérieure d'un escalier de cubes : On assemble 6 cubes identiques d'arête 1 dm en une seule file Ouest–Est pour former un escalier à 3 marches : colonne Ouest de hauteur 3 cubes, colonne centrale de hauteur 2 cubes, et colonne Est de hauteur 1 cube.

1. Décrire la **vue de face** (depuis le Sud), la **vue de dessus** et la **vue de droite** (depuis l'Est).
2. Calculer l'**aire totale extérieure** de cet escalier (en incluant la base posée sur le sol) de deux façons : en additionnant les 6 vues orthogonales, puis par le décompte des faces collées.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Ombres orthogonales et reconstruction d'un polyèdre : On éclaire un solide convexe par trois faisceaux lumineux parallèles perpendiculaires (selon les axes Ox, Oy et Oz) pour projeter ses trois ombres (vues orthogonales) sur trois murs perpendiculaires :

- l'ombre projetée sur le sol (vue de dessus) est un **disque** de diamètre 6 cm ;
- l'ombre projetée sur le mur Nord (vue de face) est un **carré** de côté 6 cm ;
- l'ombre projetée sur le mur Ouest (vue de profil) est un **carré** de côté 6 cm.

1. Quel solide classique possède exactement ces trois ombres orthogonales ? Calculer son volume.
2. Existe-t-il un solide différent (un **bicylindre** ou *solide de Steinmetz*, intersection de deux cylindres perpendiculaires de diamètre 6 cm) ? Si non, quel solide plus petit que le cylindre aurait pour ombres **trois disques** ? Et un **disque, un carré et un triangle** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de vues sur maquette (orientation Nord–Sud–Est–Ouest) : Un architecte observe un bâtiment composé de deux ailes perpendiculaires en forme de « L » posé au sol :

- L'aile **Nord** est un pavé allongé d'Ouest en Est (12 m de long, 4 m de large, 6 **m de haut**).
- L'aile **Ouest** prolonge l'extrémité Ouest vers le Sud (8 m vers le Sud, 4 m de large, 10 **m de haut**, et l'angle Nord-Ouest où elle rejoint l'aile Nord monte jusqu'à 10 m).

Décrire avec leurs dimensions exactes (largeur × hauteur et positions des décrochements) :

1. La vue depuis l'**Ouest**.
2. La vue depuis l'**Est**.
3. La vue depuis le **Sud**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Sur un plateau 3×3, on empile des cubes. La grille indique la hauteur de chaque pile (la première ligne est au **Nord**, la dernière au **Sud**, la première colonne à l'**Ouest**) :

1	0	2
2	1	3
0	1	1

1. Combien de cubes compte l'empilement ?
2. Un observateur regarde depuis le **Sud** (vers le Nord). Donner la hauteur visible de chaque colonne, de gauche à droite.
3. Un observateur regarde depuis l'**Est** (vers l'Ouest). Donner les hauteurs visibles de gauche à droite.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Identifier le solide correspondant à chaque triplet de vues (face, côté, dessus) :

1. Triangle ; triangle ; carré avec ses deux diagonales.
2. Rectangle ; rectangle ; disque.
3. Triangle ; triangle ; disque avec son centre marqué.
4. Disque ; disque ; disque.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On pose un dé standard (faces opposées de somme 7) sur une table : la face du dessus montre 1, la face avant montre 2 et la face de droite montre 3.

1. Quelles sont les faces de gauche, arrière et du dessous ?
2. On fait basculer le dé d'un quart de tour **vers la droite** (le dessus vient à droite). Quelle face est maintenant sur le dessus ? À droite ? Devant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un grand cube $3 \times 3 \times 3$ est formé de 27 petits cubes. On le regarde depuis un coin, de façon à voir trois faces.

1. Combien de petits cubes sont visibles (au moins une face visible) ?
2. Combien sont entièrement cachés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un empilement de cubes est posé sur une grille 3×3. On connaît seulement :

- la vue de face : hauteurs des colonnes de gauche à droite 2, 1, 3 ;
- la vue de côté : hauteurs des rangées de l'avant vers l'arrière 3, 1, 2.

1. Quel est le nombre minimal de cubes ?
2. Quel est le nombre maximal de cubes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Lucas est debout au centre d'une place et regarde vers le **Nord**. L'église est devant lui, la gare à sa droite et l'école derrière lui.

1. Dans quelle direction (point cardinal) se trouvent la gare et l'école ?
2. Lucas fait demi-tour. Qu'a-t-il maintenant à sa gauche ?
3. Il se tourne ensuite vers l'Ouest. Où se trouve l'église par rapport à lui ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On assemble 5 cubes d'arête 1 dm sur une grille 2×2 : deux cubes empilés dans la case arrière gauche, et un cube dans chacune des trois autres cases.

1. Calculer l'aire totale extérieure de l'assemblage (y compris le dessous), en comptant les faces visibles.
2. Vérifier avec la méthode : aire de 5 cubes séparés moins les faces en contact.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

1. Quelles formes peut avoir la vue (projection orthogonale) d'un cylindre selon la direction d'observation ? Et celle d'un cône ?
2. Un objet a pour vue de face un carré, pour vue de côté un carré, et pour vue de dessus un disque. Quel est cet objet ?
3. Un même objet peut-il avoir une vue en forme de carré, une autre en forme de triangle et une autre en forme de disque ? Proposer un exemple.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On éclaire un cube avec des rayons de lumière parallèles et on observe son ombre sur un écran perpendiculaire aux rayons.

1. Quelle est la forme de l'ombre si les rayons sont perpendiculaires à une face ?
2. Et s'ils sont parallèles à une diagonale d'une face (et à deux faces opposées) ?
3. Et s'ils sont parallèles à une grande diagonale du cube ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une maquette est formée de deux bâtiments posés sur un terrain rectangulaire : un bâtiment A de 3 étages à l'Ouest, et un bâtiment B de 5 étages à l'Est, juste derrière A (plus au Nord) et qui le dépasse en largeur.

1. Depuis le Sud, quel bâtiment voit-on en premier plan ? Voit-on le bâtiment B ?
2. Depuis le Nord, voit-on le bâtiment A ?
3. Pourquoi les architectes dessinent-ils toujours plusieurs vues ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Deux colonnes côte à côte, disposées d'ouest en est, ont des hauteurs de 2 et 4 cubes. Donne les hauteurs en vue du sud dans l'ordre ouest-est.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Quatre colonnes ont pour hauteurs 0, 2, 3, 1. Combien de cases occupées en vue de dessus et combien de cubes au total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Deux colonnes de 5 et 3 cubes sont exactement alignées dans la direction d'observation, sur un sol horizontal. Quelle hauteur montre le contour de la vue de côté ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Depuis l'avant, on voit des hauteurs de 2 et 4 dans deux colonnes projetées, chaque position pouvant cacher des cubes derrière. Quel nombre minimum de cubes est compatible ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un pavé mesure 4 cm en largeur, 9 cm en profondeur et 6 cm en hauteur. Quelle dimension est commune à la vue du dessus et à celle du côté droit ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un cube et un cylindre droit vertical ont le même diamètre ou largeur et la même hauteur. Quelle vue orthogonale, de face ou de dessus, permet de les distinguer par leur contour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Quelles hauteurs projette par colonne une grille de cubes dont les rangées ont pour hauteurs (2, 0, 1) et (1, 3, 4) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Sur trois cases occupées en vue de dessus, chaque pile mesure au plus trois cubes. Quel est l'effectif maximal ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une pyramide droite à base carrée centrée est vue du dessus. Quel est son contour ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Deux empilements ont la même vue de dessus. Cela impose-t-il le même nombre de cubes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Intersections

Exercice 1

Règles des sections planes dans un polyèdre : On coupe un cube $ABCDEFGH$ par un plan $\mathcal{P}$.

1. Expliquer pourquoi la section d'un polyèdre par un plan est toujours un **polygone**, et pourquoi lorsque deux faces du cube sont parallèles (comme $ABCD$ et $EFGH$), leurs intersections avec $\mathcal{P}$ sont nécessairement des **segments parallèles**.
2. Combien de côtés au minimum et au maximum peut posséder la section plane d'un cube ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Section rectangulaire d'un cube : On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 6$ cm (face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$ avec E au-dessus de A, etc.). On coupe ce cube par le plan passant par l'arête supérieure $[EF]$ et l'arête inférieure opposée $[CD]$.

1. Quelle est la nature exacte de la section plane $EFCD$?
2. Calculer ses dimensions exactes, son **périmètre** et son **aire** (en fonction de $\sqrt{2}$, puis arrondis au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Section triangulaire équilatérale d'un cube : Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 8$ cm, on coupe le solide par le plan passant par les trois sommets B**,** D **et** E (où E est au-dessus de A).

1. Quelle est la nature exacte du triangle BDE ? Calculer la longueur de ses côtés.
2. Calculer l'**aire exacte** de la section BDE (rappel : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{c\sqrt{3}}{2}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Section trapézoïdale dans un cube : Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 8$ cm (face supérieure $EFGH$ au-dessus de $ABCD$). On note I le milieu de $[EF]$ et J le milieu de $[FG]$.

On coupe le cube par le plan passant par les quatre points A, C, J, I.

1. Justifier que ces quatre points sont bien **coplanaires** et forment un **trapèze isocèle**.
2. Calculer les longueurs exactes des quatre côtés de la section $ACJI$, puis son périmètre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Section hexagonale régulière d'un cube : Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 6$ cm, on marque les **milieux des** 6 **arêtes** suivantes :

- M_1 milieu de $[AB]$, M_2 milieu de $[BC]$;
- M_3 milieu de $[CG]$, M_4 milieu de $[GH]$;
- M_5 milieu de $[HE]$, M_6 milieu de $[EA]$.

1. Calculer la longueur de chaque côté $M_1M_2, M_2M_3, \dots, M_6M_1$.
2. Expliquer pourquoi ces 6 points sont coplanaires (ils appartiennent tous au plan médiateur de la grande diagonale $[DF]$!).
3. En déduire la nature exacte de la section plane $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ et calculer son **aire exacte**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Section pentagonale dans un cube (méthode des traces) : Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm (base $ABCD$ au sol, $EFGH$ au plafond avec E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.). On coupe ce cube par le plan $\mathcal{P}$ passant par :

- I, milieu de $[AB]$;
- J, milieu de $[BC]$;
- K, milieu de l'arête verticale $[DH]$.

1. Dans le plan de la base $ABCD$, on prolonge la droite (IJ) jusqu'à couper le prolongement de l'arête (DA) au point P et le prolongement de (DC) au point Q. Calculer les longueurs PA et QC.
2. La droite (PK) appartient à la face arrière-gauche $ADHE$ et coupe l'arête verticale $[AE]$ en L ; de même (QK) coupe l'arête $[CG]$ en M. Par le théorème de Thalès, calculer les hauteurs AL et CM.
3. Le plan coupe-t-il la face supérieure $EFGH$? En déduire la nature précise de la section plane $IJMKL$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Section d'un prisme droit et d'un cylindre :

1. On coupe un **cylindre de révolution** de rayon $R = 5$ cm et de hauteur $h = 12$ cm :
   - par un plan parallèle à ses bases ;
   - par un plan parallèle à son axe passant à une distance $d = 3$ cm de l'axe. Préciser la nature et les dimensions exactes de chacune de ces deux sections.
2. On coupe un **prisme droit à base hexagonale régulière** de côté 4 cm par un plan parallèle à sa base. Quelle est l'aire exacte de cette section ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Section d'une pyramide parallèlement à sa base (réduction / homothétie) : Une pyramide régulière $SABCD$ a une base carrée de côté 10 cm et une hauteur $SO = 15$ cm.

On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base situé à 6 **cm du sommet** S (donc à 9 cm au-dessus de la base $ABCD$).

1. Quel est le **rapport de réduction** k de la petite pyramide supérieure par rapport à la grande pyramide ?
2. Calculer le **côté** et l'**aire** de la section carrée $A'B'C'D'$.
3. Calculer le volume de la petite pyramide supérieure, puis celui du **tronc de pyramide** restant en bas.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Section pentagonale passant par un sommet : Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête $a = 6$ cm ($EFGH$ au-dessus de $ABCD$), on note M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[CD]$.

On coupe le cube par le plan passant par le sommet supérieur E et par les deux milieux M et N.

1. Dans le plan de la base $ABCD$, prolonger la droite (MN) jusqu'à couper le prolongement de (AB) en P et le prolongement de (AD) en Q. Calculer BP et DQ.
2. La droite (EP) coupe l'arête $[BF]$ en R, et la droite (EQ) coupe l'arête $[DH]$ en S. Par le théorème de Thalès, calculer les hauteurs BR et DS.
3. En déduire la nature du polygone $ERMNS$ et calculer son **périmètre exact**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Intersection de plans dans un tétraèdre régulier : Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes mesurent 8 cm. On place les milieux I, J, K, L des arêtes respectives $[AB], [AC], [CD]$ et $[BD]$.

1. En appliquant le théorème des milieux dans les faces triangulaires du tétraèdre, démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un **carré**.
2. Calculer l'aire de cette section carrée $IJKL$, et expliquer pourquoi le plan $(IJKL)$ coupe le tétraèdre en deux morceaux de **volumes égaux**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un cylindre de rayon $R = 5$ cm et de hauteur 10 cm est coupé par un plan parallèle à son axe, situé à 3 cm de cet axe.

1. Quelle est la nature de la section ?
2. Calculer ses dimensions et son aire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Une boule de rayon 10 cm est coupée par un plan situé à 6 cm de son centre.

1. Quelle est la nature de la section ?
2. Calculer son rayon et son aire (valeur exacte et arrondi).
3. À quelle distance du centre faut-il couper pour obtenir un cercle de rayon 5 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une pyramide régulière a une base carrée de côté 8 cm et une hauteur de 12 cm. On la coupe par un plan parallèle à la base, à mi-hauteur.

1. Quelle est la nature et la dimension de la section ?
2. Calculer le volume de la grande pyramide et celui de la petite pyramide obtenue au sommet.
3. Quelle fraction du volume la petite pyramide représente-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un cône de révolution a un rayon de base de 6 cm et une hauteur de 12 cm. On le coupe par un plan parallèle à la base, à 4 cm du sommet.

1. Calculer le rayon de la section.
2. Calculer l'aire de la section.
3. Quel est le rapport entre l'aire de la section et l'aire de la base ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm (face inférieure $ABCD$, E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.), on coupe par le plan contenant les arêtes $[AB]$ et $[GH]$.

1. Quelle est la nature de la section $ABGH$?
2. Calculer ses dimensions et son aire (au dixième).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Dans un cube $ABCDEFGH$ ($ABCD$ en bas, $EFGH$ en haut, E au-dessus de A), préciser la position relative des droites suivantes (parallèles, sécantes ou non coplanaires) :

1. (AB) et (GH)
2. (AB) et (BF)
3. (AB) et (CG)
4. (AC) et (EG)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un tétraèdre régulier $ABCD$ a toutes ses arêtes de 6 cm.

1. On le coupe par le plan passant par les milieux des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Décrire la section.
2. On le coupe par le plan passant par les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[DC]$ et $[DB]$. Montrer que la section est un losange, puis admettre que c'est un carré. Calculer son périmètre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On coupe un cube d'arête 6 cm par le plan passant par les milieux des trois arêtes issues d'un même sommet.

1. Quelle est la nature de la section ? Calculer la longueur de ses côtés.
2. Calculer le volume du petit coin détaché.
3. Quelle fraction du volume du cube représente-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On coupe un cône de révolution par différents plans. Décrire la courbe obtenue :

1. Le plan est parallèle à la base.
2. Le plan est légèrement incliné et coupe toutes les génératrices.
3. Le plan est parallèle à une génératrice.
4. Le plan est vertical et passe par le sommet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On assimile la Terre à une boule de rayon 6 370 km. Un parallèle (cercle de latitude) est la section de la Terre par un plan perpendiculaire à l'axe des pôles.

1. Le parallèle passant par la Suisse est dans un plan situé à environ 4 560 km du centre de la Terre. Calculer son rayon (au km près).
2. Calculer la longueur de ce parallèle (au km près).
3. Le 60e parallèle est à 5 517 km du centre. Calculer son rayon. Que remarque-t-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un plan horizontal coupe un cube posé sur une face, sans passer par une arête. Quelle est la section ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un pavé à base rectangulaire est coupé par un plan vertical passant par une diagonale complète de la base. Quelle est la section ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un plan parallèle à la base traverse un cylindre droit. Quelle figure forme la section du cylindre plein ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un plan passant par l'axe d'un cylindre droit coupe-t-il celui-ci suivant un disque ? Quelle figure donne-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une pyramide est coupée par un plan parallèle à la base à mi-hauteur. Quel est le rapport des longueurs de la section à la base ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Deux plans distincts, non parallèles, dans l'espace peuvent-ils se croiser en un seul point ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un plan coupe une sphère de rayon 5 cm à 3 cm de son centre. Quel est le rayon du cercle de section ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Une section plane traverse les trois arêtes issues d'un coin d'un cube et aucune autre. Combien de côtés a-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une droite est parallèle à un plan et a un point dans ce plan. Combien de points de la droite appartiennent au plan ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un plan tangent à une sphère de rayon 8 cm est à quelle distance de son centre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Mesures et incertitudes

Exercice 1

Erreurs systématiques et erreurs aléatoires : Lors d'une séance de mesure de la masse d'un cylindre métallique (masse réelle : 50,0 g), deux groupes utilisent des balances différentes :

- **Groupe 1** obtient en 5 mesures : 52,1 g, 52,0 g, 52,1 g, 52,0 g, 52,1 g.
- **Groupe 2** obtient en 5 mesures : 48,5 g, 51,2 g, 49,3 g, 50,8 g, 50,2 g.

1. Quel groupe est affecté principalement par une **erreur systématique** ? Quelle peut en être la cause sur une balance ?
2. Quel groupe est affecté principalement par des **erreurs aléatoires** ? Comment peut-on réduire l'effet de ce type d'erreur ?
3. Associer les termes *juste* et *fidèle (précis)* aux résultats des deux groupes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Bonnes pratiques de lecture et incertitude de graduation :

1. Un élève mesure un volume d'eau dans une éprouvette graduée de 1 mL en 1 mL. Pourquoi doit-il lire au **bas du ménisque** et placer son œil exactement à l'**horizontale** de la graduation ? Comment appelle-t-on l'erreur commise s'il regarde d'en haut ou d'en bas ?
2. On mesure la longueur d'une tige avec une règle graduée en millimètres (1 mm). On lit 14,3 cm. En prenant comme incertitude de lecture une demi-graduation à chaque extrémité ($2 \times 0{,}5$ mm $= 1$ mm), écrire correctement le résultat avec son incertitude absolue, puis calculer l'**incertitude relative** en pourcentage.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Traitement d'une série de mesures : Cinq élèves chronomètrent la durée de 10 oscillations d'un pendule et obtiennent les valeurs suivantes :

$$14{,}2 \text{ s} \quad ; \quad 14{,}5 \text{ s} \quad ; \quad 14{,}1 \text{ s} \quad ; \quad 14{,}6 \text{ s} \quad ; \quad 14{,}1 \text{ s}$$

1. Calculer la valeur moyenne $\bar{t}$ de cette série de 5 mesures.
2. Estimer l'incertitude absolue par la **demi-étendue** $\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2}$.
3. En arrondissant l'incertitude absolue à 1 chiffre significatif et en accordant la moyenne au même rang décimal, écrire le résultat final $t_{10} = \bar{t} \pm \Delta t$, puis en déduire la **période** T **d'une seule oscillation** (avec son incertitude).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Notation scientifique et chiffres significatifs :

1. Écrire les grandeurs suivantes en **notation scientifique** ($a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$) en conservant exactement le bon nombre de chiffres significatifs, et préciser combien de chiffres significatifs comporte chaque écriture :
   - Vitesse de la lumière : $c = 299\,792\,458$ m/s (arrondie à 3 chiffres significatifs).
   - Rayon d'un atome d'hydrogène : $r = 0{,}000\,000\,000\,053$ m.
   - Masse d'une cellule : $m = 0{,}003\,50$ mg (convertir en kg).
2. Calculer l'ordre de grandeur de l'énergie $E = mc^2$ libérée si $m = 2{,}0 \times 10^{-3}$ kg était entièrement convertie en énergie (avec $c \approx 3{,}00 \times 10^8$ m/s).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Propagation des incertitudes (somme et différence) : Pour déterminer la masse nette d'un liquide contenu dans un bécher, un élève effectue deux pesées :

- masse du bécher vide : $m_1 = (124{,}2 \pm 0{,}3)$ g ;
- masse du bécher rempli : $m_2 = (218{,}6 \pm 0{,}4)$ g.

1. Calculer la masse nette du liquide $m = m_2 - m_1$.
2. On rappelle que pour une **addition ou une soustraction**, les incertitudes absolues **s'additionnent** toujours ($\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2$). Expliquer intuitivement pourquoi même pour une *soustraction*, les incertitudes ne se soustraient jamais.
3. Écrire le résultat final $m \pm \Delta m$ et calculer son incertitude relative.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Propagation des incertitudes (multiplication et division) : On mesure les dimensions d'un rectangle métallique :

- longueur : $L = (20{,}0 \pm 0{,}2)$ cm ;
- largeur : $\ell = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ cm.

1. Calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta L}{L}$ et $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ en pourcentage.
2. Pour un **produit** ($\mathcal{A} = L \times \ell$) ou un **quotient**, les **incertitudes relatives** s'additionnent : $\frac{\Delta \mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \ell}{\ell}$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, son incertitude relative et son incertitude absolue $\Delta \mathcal{A}$.
3. Vérifier ce résultat par la méthode des bornes ($\mathcal{A}_{\max} = L_{\max} \cdot \ell_{\max}$ et $\mathcal{A}_{\min} = L_{\min} \cdot \ell_{\min}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Identification d'un métal par sa masse volumique et ses incertitudes : Un élève mesure la masse et le volume d'un petit bloc métallique :

- $m = (53{,}5 \pm 0{,}5)$ g
- $V = (6{,}0 \pm 0{,}2)$ cm^3

1. Calculer la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$ en g/cm^3.
2. En additionnant les incertitudes relatives sur m et V, calculer l'incertitude relative totale puis l'incertitude absolue $\Delta\rho$. Écrire le résultat $\rho \pm \Delta\rho$.
3. Comparer avec les valeurs de référence : **fer** (7,87 g/cm^3), **laiton** (8,40 g/cm^3), **cuivre** (8,96 g/cm^3). Peut-on trancher avec certitude entre le laiton et le cuivre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Exploitation d'un graphique expérimental (loi d'Ohm) : Un élève mesure la tension U aux bornes d'une résistance pour différentes intensités I (avec une incertitude $\Delta U = \pm 0{,}3$ V). Voici son tableau :

I (A)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
U (V)	0,0	2,3	4,6	5,8	9,4	11,5

1. Quel point de mesure semble clairement **aberrant** (erreur de lecture) et doit être écarté avant de tracer la droite moyenne ?
2. En traçant la droite passant par l'origine et par le mieux-ajusté des points valides (notamment $(0{,}50; 11{,}5)$), calculer le **coefficient directeur** R (résistance électrique en ohms, Ω).
3. Estimer l'intervalle des pentes possibles (pente maximale et pente minimale) en utilisant les barres d'erreur $\pm 0{,}3$ V au dernier point $(0{,}50; 11{,}5)$, et écrire $R \pm \Delta R$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Exploitation d'un graphique avec ordonnée à l'origine non nulle : On mesure l'altitude $y(t)$ d'un ballon-sonde qui monte à vitesse constante. Les mesures enregistrées donnent un nuage de points alignés autour d'une droite passant par les points $A(10\text{ s}; 85\text{ m})$ et $B(50\text{ s}; 225\text{ m})$.

1. Calculer la **pente** de cette droite expérimentale et préciser son **unité physique** et sa signification.
2. Calculer l'**ordonnée à l'origine** y_0 de la droite et expliquer sa signification physique.
3. Pourquoi une erreur systématique sur le déclenchement du chronomètre décale-t-elle l'ordonnée à l'origine y_0, mais ne change-t-elle **pas** la pente (la vitesse) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Propagation des incertitudes sur une puissance : On mesure au pied à coulisse le diamètre D d'une bille d'acier : $D = (20{,}0 \pm 0{,}2)$ mm.

On veut calculer le volume de cette bille : $V = \frac{1}{6}\pi D^3$.

1. Calculer le volume V de la bille en mm^3, puis en cm^3 (avec $\pi \approx 3{,}1416$).
2. Comme $D^3 = D \times D \times D$, l'incertitude relative sur D^3 vaut 3 **fois** l'incertitude relative sur D : $\frac{\Delta V}{V} = 3 \times \frac{\Delta D}{D}$. Calculer l'incertitude relative sur le volume, puis son incertitude absolue ΔV en cm^3.
3. Expliquer pourquoi une erreur de 1% sur une mesure de longueur entraîne une erreur de 2% sur une aire et de 3% sur un volume.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Cinq élèves mesurent la longueur d'une table et obtiennent (en cm) : 122,3 ; 122,5 ; 122,4 ; 122,6 ; 122,2.

1. Calculer la valeur moyenne.
2. Calculer l'étendue des mesures.
3. Proposer un résultat de la forme $L = (\ldots \pm \ldots)$ cm, en prenant pour incertitude la moitié de l'étendue.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Indiquer le nombre de chiffres significatifs de chaque valeur :

1. 0,00340 m
2. $2{,}50 \times 10^3$ g
3. 4,0 s
4. 305 km
5. 0,7 L

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

On mesure un rectangle : longueur 4,2 cm et largeur 3,15 cm.

1. Calculer l'aire avec la calculatrice.
2. Avec combien de chiffres significatifs faut-il donner le résultat ? Arrondir correctement.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

1. On mesure $L = (50{,}0 \pm 0{,}5)$ cm. Calculer l'incertitude relative en pourcentage.
2. On mesure $\ell = (5{,}0 \pm 0{,}5)$ cm avec le même instrument. Calculer l'incertitude relative.
3. Laquelle des deux mesures est la plus précise ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

On pèse un bécher vide : $m_1 = (85 \pm 1)$ g, puis le bécher rempli de liquide : $m_2 = (205 \pm 1)$ g.

1. Calculer la masse du liquide.
2. Quelle est l'incertitude sur cette masse ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

On mesure une plaque rectangulaire : $L = (10{,}0 \pm 0{,}1)$ cm et $\ell = (5{,}0 \pm 0{,}1)$ cm.

1. Calculer l'aire.
2. Calculer les incertitudes relatives sur L et ℓ. On admet que pour un produit, les incertitudes **relatives** s'additionnent : en déduire l'incertitude sur l'aire.
3. Vérifier en calculant les aires minimale et maximale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Pour identifier un métal, un élève mesure la masse et le volume d'un échantillon : $m = (27{,}0 \pm 0{,}5)$ g et $V = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ cm^3.

Masses volumiques de référence : aluminium 2,70 ; zinc 7,13 ; fer 7,87 ; cuivre 8,96 g/cm^3.

1. Calculer la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$.
2. Estimer son incertitude (somme des incertitudes relatives).
3. Identifier le métal.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Une balance électronique affiche 2 g alors que le plateau est vide (elle n'a pas été remise à zéro). On pèse trois objets et on lit : 52 g, 104 g et 77 g.

1. Quel type d'erreur est-ce (aléatoire ou systématique) ?
2. Corriger les trois mesures.
3. Refaire la mesure plusieurs fois et calculer la moyenne permet-il de corriger ce type d'erreur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Pour mesurer la période T d'un pendule (durée d'un aller-retour), on chronomètre 10 oscillations et on obtient 20,4 s. Le temps de réaction de l'expérimentateur introduit une incertitude d'environ 0,2 s sur toute mesure de durée au chronomètre.

1. Calculer T et son incertitude.
2. Quelle aurait été l'incertitude en mesurant une seule oscillation ?
3. Pourquoi mesure-t-on plusieurs oscillations ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Écrire les grandeurs suivantes en notation scientifique avec 3 chiffres significatifs :

1. La vitesse de la lumière : $299\,792\,458$ m/s
2. Le diamètre d'un cheveu : 0,0000715 m
3. La masse de la Terre : $5\,972\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg
4. Calculer le temps mis par la lumière pour parcourir 1 m, en notation scientifique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une règle est graduée tous les 2 mm. Prends une incertitude égale à une demi-graduation. Quel intervalle accompagne une lecture de 56 mm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une balance affiche 3 g avec le plateau vide. Une fois l'objet posé, elle affiche 81 g. Corrige le biais du zéro supposé constant.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Quatre mesures sont 19,8 g, 20,1 g, 20,0 g et 20,1 g. Calcule la moyenne.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

En répétant une mesure, on obtient des valeurs de 4,6 s à 4,9 s. Quelle est l'étendue des mesures ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un volume est donné par 28 mL $\pm$ 2 mL et un autre par 31 mL $\pm$ 1 mL. Leurs intervalles ont-ils au moins une valeur commune ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Deux longueurs sont encadrées par [9, 11] cm et [18, 22] cm. Encadre leur somme.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une mesure de 16,784 s doit être donnée au centième de seconde. Quel résultat écrire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Pourquoi recommence-t-on plusieurs fois un chronométrage manuel ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une éprouvette étroite a des graduations de 1 mL et un bécher en a de 25 mL. Pour lire 38 mL, lequel offre la résolution la plus fine ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Trois mesures par un même capteur valent exactement 12,0 °C. Cela garantit-il que la valeur de référence est 12,0 °C ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Lentilles convergentes

Exercice 1

Reconnaissance, foyers et vergence :

1. Comment reconnaît-on une **lentille convergente** au toucher (forme des bords par rapport au centre) et en regardant un texte imprimé tout près de la lentille ? Quel est son symbole normalisé en optique ?
2. Définir le **foyer image** F' et la **distance focale** f d'une lentille convergente.
3. Calculer la **vergence** $C = \frac{1}{f}$ (en dioptries, δ) de deux lentilles convergentes de distances focales $f_1 = 20$ cm et $f_2 = 50$ cm. Laquelle fait le plus converger la lumière ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Les 3 rayons particuliers d'une lentille convergente : On place un objet lumineux vertical AB (avec A sur l'axe optique et B au-dessus) devant une lentille mince convergente de centre optique O, de foyer objet F et de foyer image F'.

1. Énoncer la marche exacte des 3 **rayons particuliers** issus du point objet B :
   - le rayon parallèle à l'axe optique ;
   - le rayon passant par le centre optique O ;
   - le rayon passant par le foyer objet F.
2. Comment obtient-on l'image B' de B, puis l'image A' de A ? Que se passe-t-il si l'objet AB est placé exactement dans le **plan focal objet** (à la distance $p = f$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Formation d'une image réelle (cas $p > 2f$) : Un objet lumineux AB de hauteur $h = 4{,}0$ cm est placé à la distance $p = 60$ cm devant une lentille convergente de distance focale $f = 20$ cm.

On utilise la relation de conjugaison des lentilles minces (convention des distances algébriques : $p > 0$ devant la lentille, $p' > 0$ derrière la lentille, $f > 0$ pour une lentille convergente) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

1. Calculer la position p' de l'image $A'B'$ par rapport à la lentille.
2. Calculer le grandissement γ et la hauteur h' de l'image.
3. L'image est-elle **réelle ou virtuelle**, **droite ou renversée**, **plus grande ou plus petite** que l'objet ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Montage $2f$–$2f$ et projecteur de diapositives ($f < p < 2f$) : Une lentille convergente a une distance focale $f = 15$ cm.

1. On place un objet de hauteur $h = 3{,}0$ cm à $p = 30$ cm devant la lentille (soit exactement à $2f$). Calculer p' et h'. Que remarque-t-on ?
2. On rapproche ensuite une diapositive ($h = 2{,}4$ cm) à la distance $p = 20$ cm devant cette même lentille. Où doit-on placer l'écran pour obtenir une image nette, et quelle sera sa hauteur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Fonctionnement de la loupe (image virtuelle, $p < f$) : Un horloger utilise une loupe (lentille convergente de distance focale $f = 12$ cm) pour examiner un engrenage de hauteur $h = 2{,}0$ mm placé à $p = 8{,}0$ **cm** devant la loupe.

1. Expliquer graphiquement pourquoi les rayons qui sortent de la lentille divergent et ne peuvent pas former d'image sur un écran.
2. Calculer la position algébrique p' de l'image, son grandissement γ et sa hauteur h'.
3. Conclure sur les trois propriétés de l'image vue à travers la loupe.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Problème inverse — Déterminer la distance focale d'une lentille :

1. On place une bougie à une distance $p = 30$ cm d'une lentille convergente, et l'on recueille une image nette et renversée sur un écran situé à $p' = 60$ cm derrière la lentille. Calculer la distance focale f et la vergence C de cette lentille.
2. *Méthode d'autocollimation / soleil :* Un élève fait converger les rayons du Soleil (objet considéré à l'infini, $p \to +\infty$) sur une feuille de papier et obtient un minuscule point lumineux très brillant à 12,5 cm derrière une autre lentille. Quelle est la distance focale de cette seconde lentille ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Problème avec grandissement imposé : On dispose d'une lentille convergente de distance focale $f = 25$ cm. On souhaite projeter sur un écran l'image réelle d'une figure de hauteur $h = 2{,}0$ cm de sorte que l'image sur l'écran soit 4 **fois plus grande** que l'objet (soit $h' = -8{,}0$ cm, $\gamma = -4$).

1. À partir de $\gamma = -\frac{p'}{p} = -4$, exprimer p' en fonction de p.
2. Remplacer p' dans la relation de conjugaison $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ pour calculer la distance objet–lentille p et la distance lentille–écran p'.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Méthode de Bessel (distance fixe entre l'objet et l'écran) : Sur un banc optique, un objet AB et un écran sont maintenus à une distance fixe $D = p + p' = 90$ cm l'un de l'autre. On déplace entre eux une lentille convergente de distance focale $f = 20$ cm.

1. En posant $p' = 90 - p$ dans $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{20}$, montrer que p vérifie l'équation du second degré : $p^2 - 90p + 1\,800 = 0$.

2. Vérifier que cette équation admet **deux solutions** $p_1 = 30$ cm et $p_2 = 60$ cm (principe du retour inverse de la lumière !).
3. Comparer la taille des deux images obtenues pour un objet de 3,0 cm de haut.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Appareil photographique et mise au point : L'objectif d'un appareil photo est assimilé à une lentille mince convergente de distance focale fixe $f = 50$ mm (5,0 cm).

1. À quelle distance p' du capteur (l'écran) doit se trouver l'objectif pour photographier un paysage très lointain (à l'infini) ?
2. On veut maintenant photographier une fleur située à $p = 55$ cm devant l'objectif. Calculer la nouvelle distance objectif–capteur p'. De combien de millimètres a-t-il fallu **avancer** l'objectif par rapport à la mise au point à l'infini ?
3. Si la fleur mesure 6,0 cm de haut, quelle est la hauteur de son image sur le capteur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (masque partiel d'une lentille et champ lumineux) : Un objet lumineux AB de 4 cm forme une image nette $A'B'$ sur un écran à l'aide d'une lentille convergente de diamètre 6 cm et de focale $f = 20$ cm.

1. On colle un morceau de carton noir opaque sur la **moitié inférieure** de la lentille. L'image $A'B'$ sur l'écran devient-elle coupée en deux (ne voit-on plus que la moitié de l'objet), ou reste-t-elle entière ? Que change concrètement ce carton sur l'écran ?
2. Même question si l'on perce un tout petit trou de 3 mm au centre d'un carton couvrant toute la lentille : que se passe-t-il alors pour la luminosité et la **profondeur de champ** (netteté quand on décale légèrement l'écran) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

La **vergence** d'une lentille est $C = \frac{1}{f}$ (f en mètres, C en dioptries δ).

1. Calculer la vergence d'une lentille de distance focale 25 cm.
2. Calculer la distance focale d'une lentille de $+5\,\delta$.
3. Laquelle de ces deux lentilles est la plus convergente ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un objet de 3,0 cm est placé à 40 cm devant une lentille convergente de distance focale $f = 10$ cm.

On utilise $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ et $\gamma = -\frac{p'}{p}$.

1. Calculer la position p' de l'image.
2. Calculer le grandissement et la taille de l'image.
3. Décrire l'image.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un objet de 2,0 cm est placé à 30 cm devant une lentille convergente de distance focale 20 cm.

1. Calculer p', γ et h'.
2. Quel appareil fonctionne selon ce principe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un objet est placé à 24 cm d'une lentille convergente de distance focale 12 cm.

1. Calculer la position de l'image et le grandissement.
2. Que remarque-t-on ? Généraliser à un objet placé à $2f$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un horloger observe un petit rouage avec une loupe de distance focale 5 cm. Le rouage est à 4 cm de la loupe.

1. Calculer la position de l'image.
2. Calculer le grandissement.
3. Décrire l'image. Peut-on la projeter sur un écran ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

1. Une bougie est à 60 cm d'une lentille convergente ; on obtient une image nette sur un écran à 30 cm derrière la lentille. Calculer la distance focale et la vergence.
2. Que se passe-t-il si l'on place la bougie exactement au foyer objet de la lentille ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un vidéoprojecteur doit projeter une image d'un objet de 36 mm de large sur un écran de 1,80 m de large, placé à 4,0 m de l'objectif.

1. Quel doit être le grandissement (en valeur absolue) ?
2. En déduire la distance p entre l'objet et l'objectif.
3. Calculer la distance focale de l'objectif (au mm près).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

L'objectif d'un appareil photo a une distance focale de 50 mm.

1. Pour un paysage très lointain, à quelle distance de l'objectif doit se trouver le capteur ?
2. Pour photographier une personne à 2 m, calculer la distance objectif–capteur (au dixième de mm).
3. De combien faut-il déplacer l'objectif pour faire la mise au point ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

On photographie la Lune avec un téléobjectif de distance focale 500 mm. La Lune est vue sous un angle (diamètre apparent) d'environ 0,0090 rad.

1. Où se forme l'image de la Lune ?
2. Pour un objet à l'infini, la taille de l'image vaut $f \times \alpha$ (angle en radians). Calculer le diamètre de l'image de la Lune sur le capteur.
3. Le capteur mesure 36 mm × 24 mm. Quelle distance focale faudrait-il pour que la Lune occupe toute la hauteur du capteur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une lentille convergente forme sur un écran l'image nette d'un objet lumineux. On cache la moitié supérieure de la lentille avec un carton.

1. L'image est-elle coupée en deux ? Justifier.
2. Qu'est-ce qui change ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une lentille convergente de distance focale 8 cm reçoit un faisceau parallèle à son axe. Où placer l'écran pour un point lumineux net ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un objet est placé à 24 cm d'une lentille convergente de focale 12 cm. Où est l'image et quelle est sa taille relative ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une lentille convergente a une focale de 25 cm. Calcule sa vergence.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un objet est exactement dans le plan focal objet. Observe-t-on une image nette de cet objet sur un écran à distance finie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Quel rayon issu du sommet d'un objet peut-on tracer sans déviation dans le modèle de la lentille mince ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Une loupe convergente est placée à 4 cm d'un timbre et sa focale vaut 9 cm. L'image peut-elle être projetée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une lentille de focale 10 cm forme une image réelle à 15 cm derrière elle. À quelle distance est l'objet ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

On approche un objet de 30 cm à 20 cm d'une lentille convergente de focale 10 cm. Où placer l'écran dans les deux cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une image réelle d'un objet de 3 cm est deux fois plus grande. Quelle est sa hauteur et son orientation ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On masque la moitié d'une lentille mince convergente qui formait une image réelle. En première approximation, que devient l'image ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Lentilles divergentes

Exercice 1

Reconnaissance, foyers et vergence d'une lentille divergente :

1. Comment reconnaît-on une **lentille divergente** au toucher (forme des bords) et en regardant un texte à travers elle ? Quel est son symbole normalisé ?
2. Quelle est la position du **foyer image** F' d'une lentille divergente (avant ou après la lentille par rapport au sens de la lumière) ?
3. Une lentille divergente a une distance focale algébrique $f = -25$ cm. Calculer sa **vergence** C en dioptries (δ).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Les 3 rayons particuliers d'une lentille divergente : Pour une lentille divergente, le foyer image F' est situé **devant** la lentille (à gauche, côté objet) et le foyer objet F est situé **derrière** la lentille (à droite).

Énoncer la marche géométrique des 3 rayons particuliers issus du sommet B d'un objet réel AB placé devant la lentille :

1. le rayon incident parallèle à l'axe optique ;
2. le rayon incident passant par le centre optique O ;
3. le rayon incident dont le prolongement pointe vers le foyer objet F (situé derrière la lentille).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Localisation d'une image par une lentille divergente : On place un objet réel AB de hauteur $h = 6{,}0$ cm à une distance $p = 30$ cm devant une lentille divergente de distance focale $f = -15$ cm.

Avec la convention $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ et $\gamma = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$:

1. Calculer la position algébrique p' de l'image $A'B'$.
2. Calculer le grandissement γ et la hauteur h' de l'image.
3. Préciser si l'image est **réelle ou virtuelle**, **droite ou renversée**, **agrandie ou rétrécie**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Propriété universelle de la lentille divergente pour un objet réel :

1. En utilisant la formule $\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$ avec $p > 0$ (objet réel) et $f = -|f| < 0$ (lentille divergente), montrer que :
   - p' est **toujours négatif** et vérifie $|p'| < |f|$;
   - le grandissement $\gamma = -\frac{p'}{p}$ est **toujours compris entre** 0 **et** 1.
2. En déduire où se trouve toujours l'image virtuelle d'un objet réel à travers une lentille divergente, et pourquoi cette image ne peut jamais être plus grande que l'objet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Judas optique (œilleton de porte) : Un judas optique placé sur une porte d'entrée agit approximativement comme une lentille divergente de vergence $C = -20\ \delta$.

1. Quelle est la distance focale f (en cm) de cette lentille divergente ?
2. Un visiteur mesurant 1,80 m (180 cm) se tient devant la porte à la distance $p = 1{,}20$ m (120 cm). Calculer la position p' et la hauteur h' de son image virtuelle vue à travers le judas.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Recherche de la distance focale d'une lentille divergente : Un élève observe un objet de hauteur $h = 8{,}0$ cm placé à $p = 40$ cm devant une lentille divergente. Il estime que l'image virtuelle obtenue est droite et mesure $h' = 2{,}0$ cm (soit $\gamma = +0{,}25$).

1. En utilisant $\gamma = -\frac{p'}{p}$, trouver la position algébrique p' de cette image virtuelle.
2. En déduire la distance focale f et la vergence C de la lentille divergente.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Position particulière $p = |f|$ devant une lentille divergente : On place un objet de hauteur $h = 5{,}0$ cm exactement sur le foyer objet? Non : on place l'objet à une distance $p = |f| = 20$ cm devant une lentille divergente de distance focale $f = -20$ cm (c'est-à-dire à la position du foyer image F' !).

1. Calculer la position p' de l'image et le grandissement γ.
2. Montrer que ce résultat est général : lorsque $p = |f|$, l'image se forme toujours à mi-distance entre F' et O avec une taille moitié de celle de l'objet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Comparaison loupe (convergente) vs lentille divergente : Un élève dispose de deux lentilles de distances focales $|f| = 20$ cm : l'une est convergente ($f_1 = +20$ cm) et l'autre est divergente ($f_2 = -20$ cm). Il place devant chacune un même timbre de hauteur $h = 3{,}0$ cm à la distance $p = 10$ cm.

1. Calculer la position et la taille de l'image virtuelle obtenue avec la lentille **convergente**.
2. Calculer la position et la taille de l'image virtuelle obtenue avec la lentille **divergente**.
3. Comment l'élève peut-il distinguer les deux lentilles d'un seul coup d'œil en regardant le timbre à travers chacune à cette distance ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Faisceau convergent intercepté par une lentille divergente (objet virtuel) : Une première lentille convergente fait converger un faisceau lumineux vers un point A situé à 20 cm derrière elle. Avant que les rayons n'atteignent A, on interpose une **lentille divergente** de distance focale $f = -30$ cm à 10 cm avant le point A.

Le point A joue donc le rôle d'un **objet virtuel** situé à 10 cm *derrière* la lentille divergente, soit $p = -10$ cm dans la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$.

1. Calculer la position p' du nouveau point de convergence A' après la lentille divergente.
2. L'image finale A' est-elle **réelle** (peut-on la recueillir sur un écran) ou **virtuelle** ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème d'extension — Effet d'un déplacement de l'objet devant une lentille divergente : Un objet de hauteur $h = 9{,}0$ cm est d'abord placé à $p_1 = 40$ cm devant une lentille divergente de focale $f = -20$ cm, puis on le rapproche à $p_2 = 10$ cm.

1. Calculer les deux positions images p'_1 et p'_2 ainsi que les deux hauteurs images h'_1 et h'_2.
2. Lorsque l'objet se rapproche de la lentille divergente, comment évoluent la **position** et la **taille** de son image virtuelle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

1. Calculer la vergence d'une lentille divergente de distance focale $f = -20$ cm.
2. Calculer la distance focale d'une lentille de vergence $-2{,}5\,\delta$.
3. Comment reconnaître une lentille divergente au toucher et en regardant un texte à travers elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un objet de 4,0 cm est placé à 20 cm d'une lentille divergente de distance focale $f = -20$ cm.

($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ et $\gamma = -\frac{p'}{p}$.)

1. Calculer la position de l'image.
2. Calculer le grandissement et la taille de l'image.
3. Décrire l'image.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un objet est placé à 60 cm d'une lentille divergente de distance focale -30 cm.

1. Calculer p' et γ.
2. Comparer la position de l'image avec celle du foyer.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un objet est placé à 10 cm d'une lentille divergente de distance focale -10 cm (objet au foyer objet).

1. Calculer p' et γ.
2. Comparer avec ce qui se passe pour une lentille convergente lorsque l'objet est au foyer.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une lentille divergente de distance focale -15 cm reçoit un faisceau de rayons parallèles à l'axe (objet à l'infini).

1. Où semble converger le faisceau émergent ?
2. Pourquoi dit-on que le foyer d'une lentille divergente est « virtuel » ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un élève regarde un objet situé à 40 cm à travers une lentille divergente. Il localise l'image virtuelle à 24 cm de la lentille, du côté de l'objet.

1. Quelle est la valeur algébrique de p' ?

2. Calculer la distance focale de la lentille et sa vergence.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

On veut montrer qu'une lentille divergente donne toujours d'un objet réel une image plus petite.

1. En combinant les formules, on obtient $\gamma = \frac{f}{f-p}$. Vérifier cette formule avec l'exercice où $f = -20$ cm et $p = 20$ cm.
2. Avec $f < 0$ et $p > 0$, montrer que $0 < \gamma < 1$.
3. Calculer γ pour $p = 1$ cm, $p = 20$ cm et $p = 200$ cm (avec $f = -20$ cm). Que se passe-t-il quand l'objet s'éloigne ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On accole une lentille convergente de distance focale 20 cm et une lentille divergente de distance focale -40 cm. Pour des lentilles accolées, les vergences s'additionnent.

1. Calculer la vergence de chaque lentille, puis celle de l'ensemble.
2. L'ensemble est-il convergent ou divergent ? Quelle est sa distance focale ?
3. Comment pourrait-on obtenir un ensemble de vergence nulle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un judas de porte se comporte comme une lentille divergente de distance focale -2 cm. Un visiteur de 1,80 m se tient à 1 m de la porte.

1. Calculer la position de l'image (au dixième de mm).
2. Calculer la taille de l'image.
3. Pourquoi utilise-t-on une lentille divergente pour un judas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un élève a deux lentilles d'apparence semblable. En regardant un texte à 5 cm à travers chacune :

- avec la lentille L_1, les lettres paraissent plus grandes et droites ;
- avec la lentille L_2, les lettres paraissent plus petites et droites.

1. Identifier le type de chaque lentille.
2. Avec L_1, que voit-on si l'on éloigne beaucoup le texte (au-delà du foyer) ?
3. Proposer une expérience simple, avec le Soleil, pour confirmer le type de L_1 et mesurer sa distance focale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un faisceau parallèle à l'axe traverse une lentille divergente de focale -20 cm. D'où semblent venir les rayons émergents ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Donne la vergence d'une lentille divergente de focale -50 cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une lentille a une vergence -5 dioptries. Quelle est sa focale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Peut-on projeter l'image d'un objet réel donnée par une lentille divergente seule ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une lentille divergente de focale -12 cm observe un objet réel à 12 cm. Quelle distance algébrique image donne $1/\mathrm{q} = 1/\mathrm{f} - 1/\mathrm{p}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Pour l'objet à 12 cm et son image à $\mathrm{q} = -6$ cm, trouve le grandissement $-q/p$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une image d'objet réel par une lentille divergente est-elle du côté de l'objet ou de l'autre côté ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Quel rayon d'une lentille divergente ressort parallèle à l'axe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Dans l'air, une lentille mince est plus fine au centre qu'aux bords. De quel type s'agit-il pour un verre d'indice supérieur à l'air ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Qu'arrive-t-il à un rayon passant par le centre optique d'une lentille divergente mince ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

L'oeil et la vision

Exercice 1

Modèle de l'œil réduit : Pour étudier la formation des images dans l'œil humain, on modélise l'œil par un système simple composé de trois éléments optiques principaux.

1. Associer chacun des éléments réels de l'œil — **iris/pupille**, **cristallin (+ cornée)**, **rétine** — à son équivalent sur un banc d'optique (**diaphragme**, **lentille convergente**, **écran**).
2. Sur la rétine, l'image d'un arbre observé au loin est-elle **droite ou renversée** ? Comment expliquer que nous percevions pourtant le monde à l'endroit ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Le phénomène d'accommodation : Contrairement à un appareil photo qui déplace sa lentille pour faire la mise au point, la distance entre le cristallin et la rétine d'un œil humain adulte reste **fixe**, égale environ à $d = 17$ mm (0,017 m).

1. Comment l'œil parvient-il néanmoins à voir nettement aussi bien une montagne lointaine qu'un livre tenu à 25 cm ? Quel paramètre optique varie ?
2. Calculer la vergence (en dioptries) et la distance focale du modèle de l'œil réduit ($p' = 17$ mm) :
   - lorsque l'œil regarde à l'infini (œil au repos, **punctum remotum** PR) ;
   - lorsque l'œil accommode au maximum pour lire à $p = 25$ cm (**punctum proximum** PP).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

La myopie et sa correction : Un élève **myope** voit parfaitement net de près, mais voit flou les objets éloignés (au-delà d'une certaine distance).

1. Où se forme l'image d'un objet situé à l'infini dans un œil myope au repos (avant ou derrière la rétine) ? L'œil myope est-il **trop convergent** ou **pas assez convergent** ?
2. Quel type de lentille correctrice (convergente ou divergente) doit-on prescrire dans ses lunettes ?
3. Le **punctum remotum** (point le plus éloigné vu net sans lunettes) de cet élève est à 50 cm devant son œil. Pour qu'il voie net à l'infini avec des lunettes (collées à l'œil en première approximation), ses verres doivent former d'un objet à l'infini une image virtuelle à $p' = -50$ cm. Calculer la **vergence** C et la distance focale de ses lunettes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

L'hypermétropie et sa correction : Une personne **hypermétrope** a un œil **pas assez convergent** (ou trop court) au repos.

1. Où aurait tendance à se former l'image d'un objet situé à l'infini dans un œil hypermétrope au repos ? Pourquoi une personne jeune légèrement hypermétrope parvient-elle malgré tout à voir net de loin, mais souffre souvent de fatigue oculaire et de maux de tête en lisant ?
2. Quel type de lentille correctrice faut-il lui prescrire ?
3. Son ophtalmologue lui prescrit des verres de vergence $C = +2{,}5\ \delta$. Quelle est la distance focale de ces verres, et quel type de lentille est-ce ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

La presbytie et les verres de lecture : Avec l'âge (dès 40–45 ans), le cristallin perd de sa souplesse et les muscles ciliaires peinent à le bomber : c'est la **presbytie**.

Une personne a une vision parfaite de loin (elle voit net à l'infini sans lunettes), mais son **punctum proximum** (distance minimale de vision nette) a reculé jusqu'à $d_{\mathbf{PP}} = 1{,}00$ **m**.

1. Quel type de lunettes (loupes) doit-elle utiliser uniquement pour lire son journal à une distance confortable de $p = 25$ cm (0,25 m) ?
2. Les lunettes doivent former d'un texte situé à $p = 0{,}25$ m une image virtuelle située exactement à son punctum proximum ($p' = -1{,}00$ m). Calculer la **vergence** C et la distance focale de ses lunettes de lecture.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Calcul de la correction d'un œil hypermétrope par le PP : Un patient hypermétrope (trop peu convergent) voit parfaitement au loin en forçant, mais sans lunettes son **punctum proximum** est à 80 cm (0,80 m).

1. Calculer la vergence C des lunettes convergentes lui permettant de lire confortablement à $p = 25$ cm (en formant une image virtuelle à $p' = -80$ cm).
2. Pourquoi ce patient garde-t-il ses lunettes **tout le temps** (contrairement au presbyte pur) s'il veut voir net aussi de loin sans fatiguer son cristallin ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Plage de vision nette d'un myope corrigé et non corrigé : Un patient myope a, sans lunettes, un punctum remotum à PR = 40 cm et une amplitude d'accommodation normale de $\Delta C = +4{,}0\ \delta$.

1. Quel est son **punctum proximum (PP)** sans lunettes ? *(Indication : sans lunettes, l'écart en dioptries vaut* $\frac{1}{PP} - \frac{1}{PR} = 4{,}0\ \delta$*.)*
2. On lui prescrit des verres de vergence $C = -2{,}5\ \delta$ pour corriger sa vision à l'infini. Où se situe alors son nouveau punctum proximum **avec ses lunettes** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Pourquoi voit-on flou sous l'eau sans masque de plongée ? Dans l'air ($n_{\text{air}} = 1{,}00$), la face bombée de la **cornée** (indice $n_{\text{cornée}} \approx 1{,}38$) assure environ les deux tiers de la convergence totale de l'œil ($\approx +43\ \delta$ sur $+60\ \delta$).

1. Lorsqu'un nageur ouvre les yeux directement dans l'eau ($n_{\text{eau}} = 1{,}33$), pourquoi la cornée perd-elle presque tout son pouvoir convergent ?
2. L'œil sous l'eau se comporte alors comme un œil fortement **hypermétrope** ou fortement **myope** ?
3. Pourquoi un **masque de plongée** à vitre plate restaure-t-il une vision nette sous l'eau ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Diamètre apparent et pouvoir séparateur de l'œil : L'œil humain moyen distingue deux points séparés s'ils sont vus sous un **diamètre apparent** (angle α) d'au moins 1 minute d'arc ($\alpha_{\min} \approx 0{,}0003$ rad), ce qui correspond à un écart minimal d'environ 0,075 mm (75 μm) à la distance $D = 25$ cm.

1. Sur la rétine (située à $d = 17$ mm derrière le centre optique), à quel espacement minimal entre deux cônes/bâtonnets correspond cet angle $\alpha_{\min} = 0{,}0003$ rad ? *(Utiliser* $\Delta y = d \times \alpha_{\min}$*.)*
2. Une tour haute de $H = 60$ m est observée à une distance $L = 300$ m. Quelle est la **hauteur de son image sur la rétine** (en mm) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (taille de l'image sur la rétine à travers des lunettes) :

Lors d'un examen ophtalmologique, le médecin lit sur les lunettes d'un patient qu'elles ont une vergence $C = -5{,}0\ \delta$ (verre épais au bord, mince au centre).

1. Quel trouble de la vision corrige ce verre ? Quel est l'état du cristallin au repos sans lunettes ?
2. Calculer le **punctum remotum** sans lunettes de ce patient.
3. Pourquoi une personne portant des lunettes fortement négatives (myopie forte) paraît-elle avoir des **yeux plus petits** lorsqu'on la regarde de face à travers ses verres ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On modélise l'œil par une lentille convergente (cristallin) et un écran (rétine) situé à 17 mm derrière elle.

1. Quelle doit être la vergence de l'œil pour voir net un objet très éloigné ?

2. Quelle doit être sa vergence pour voir net un objet à 25 cm ?
3. De combien de dioptries l'œil a-t-il dû augmenter sa vergence ? Comment s'appelle ce phénomène ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un arbre de 10 m de haut est situé à 50 m d'un observateur. On modélise l'œil par une lentille et la rétine à 17 mm.

1. Calculer la taille de l'image de l'arbre sur la rétine.
2. L'image est-elle droite ou renversée ? Pourquoi voyons-nous pourtant l'arbre à l'endroit ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un élève myope voit net jusqu'à 2 m au maximum (punctum remotum PR = 2 m).

1. Quel type de lentille doit-il porter ?
2. Calculer la vergence des verres (la lentille doit donner d'un objet à l'infini une image virtuelle au PR).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Une personne hypermétrope ne voit net de près qu'à partir de 1 m (punctum proximum PP = 1 m). Elle veut lire un livre tenu à 25 cm.

1. La lentille correctrice doit donner du livre une image virtuelle située au PP. Calculer sa vergence.
2. Est-elle convergente ou divergente ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Avec l'âge, le cristallin perd sa souplesse : c'est la **presbytie**. Pour un œil sans autre défaut, le punctum proximum vaut $\mathrm{PP} = \frac{1}{A}$, où A est l'amplitude d'accommodation (en dioptries).

1. À 20 ans, $A \approx 10\,\delta$; à 50 ans, $A \approx 2\,\delta$. Calculer le PP dans chaque cas.
2. Quelle vergence de « lunettes de lecture » faut-il à 50 ans pour lire à 25 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

L'œil humain distingue deux points s'ils sont vus sous un angle d'au moins 3×10^{-4} rad (environ 1 minute d'angle). Pour de petits angles, angle $\approx \frac{\text{écart}}{\text{distance}}$.

1. Quel est l'écart minimal entre deux points visibles séparément à 10 m ?
2. Les phares d'une voiture sont écartés de 1,5 m. Jusqu'à quelle distance voit-on deux phares distincts ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

La pupille se contracte en pleine lumière (diamètre 2 mm) et se dilate dans l'obscurité (diamètre 8 mm).

1. Par combien la surface de la pupille est-elle multipliée entre ces deux situations ?
2. Quel est le rôle de cette adaptation ?
3. À quel élément d'un appareil photo la pupille correspond-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

La Lune est vue sous un angle d'environ 0,5°, soit 0,0087 rad.

1. Calculer le diamètre de l'image de la Lune sur la rétine (distance cristallin–rétine 17 mm).
2. Pourquoi la Lune paraît-elle plus grande à l'horizon qu'au zénith, alors que son image sur la rétine a la même taille ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Associer chaque description à un défaut de la vision (myopie, hypermétropie, presbytie, astigmatisme) et au type de correction :

1. L'œil est trop long : l'image d'un objet lointain se forme avant la rétine.
2. Le cristallin a perdu sa souplesse avec l'âge : la lecture de près devient difficile.
3. La cornée n'est pas parfaitement sphérique : les lignes verticales et horizontales ne sont pas nettes en même temps.
4. L'œil est trop court : l'image se forme derrière la rétine et il faut accommoder même pour voir loin.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

La persistance rétinienne fait qu'une image reste « imprimée » sur la rétine environ $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{25}$ de seconde.

1. Pourquoi un film composé de 24 images fixes par seconde paraît-il animé ?
2. Combien d'images contient un film de 1 h 30 à 24 images par seconde ?
3. Pourquoi voit-on un trait lumineux quand on agite rapidement une lampe dans le noir ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Dans le modèle de l'œil, quelle structure joue le rôle de l'écran où se forme l'image ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Quelle structure règle la taille de la pupille ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Quand l'œil regarde un texte proche après un paysage éloigné, sa vergence augmente-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Dans un œil myope non corrigé et au repos, où se forme l'image d'un objet très éloigné ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Quel type de lentille peut corriger la myopie ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Dans le modèle d'un œil hypermétrope au repos, où se situerait le foyer image d'un faisceau lointain par rapport à la rétine ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Dans l'œil réduit, l'image formée sur la rétine d'un objet réel est-elle droite ou renversée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Pourquoi une pupille plus petite laisse-t-elle entrer moins de lumière ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Dans un œil réduit regardant un objet à l'infini, la rétine se trouve 2 cm derrière la lentille. Quelle focale est nécessaire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Comment adapter un modèle d'œil fait d'une lentille et d'un écran fixe pour rendre net un objet rapproché ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Systèmes de lentilles

Exercice 1

Lentilles accolées (théorème des vergences) : Lorsque deux lentilles minces L_1 et L_2 de vergences respectives C_1 et C_2 sont **accolées** (collées l'une contre l'autre, distance nulle), l'ensemble équivaut à une lentille unique de vergence $C = C_1 + C_2$.

1. On accole deux lentilles convergentes de distances focales $f_1 = 20$ cm et $f_2 = 50$ cm. Calculer la vergence C et la distance focale f du doublet.
2. On accole une lentille convergente ($f_1 = +25$ cm) avec une lentille divergente ($f_2 = -50$ cm). L'ensemble obtenu est-il globalement **convergent ou divergent** ? Calculer sa distance focale équivalente f.
3. Quelle lentille doit-on accoler à une lentille convergente de $+4{,}0\ \delta$ pour obtenir un système neutre équivalent à une vitre plane ($C = 0\ \delta$, $f \to \infty$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Association de deux lentilles convergentes séparées (méthode étape par étape) : Sur un banc optique, deux lentilles convergentes L_1 ($f_1 = 20$ cm) et L_2 ($f_2 = 15$ cm) sont séparées par une distance $d = 90$ **cm**.

On place un objet lumineux AB de hauteur $h = 2{,}0$ cm à $p_1 = 30$ **cm devant** L_1.

1. Calculer la position p_1' (derrière L_1) et la hauteur h_1' de l'**image intermédiaire** A_1B_1 formée par L_1.
2. L'image A_1B_1 sert d'objet pour la seconde lentille L_2. À quelle distance $p_2 = d - p_1'$ se trouve-t-elle devant L_2 ?
3. Calculer la position finale p_2' (derrière L_2), le grandissement total $\gamma_{\text{tot}} = \gamma_1 \times \gamma_2$, et la hauteur finale h_2'. L'image finale est-elle droite ou renversée par rapport à AB ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Principe de la lunette astronomique (système afocal) : Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles convergentes :

- l'**objectif** L_1 de grande distance focale $f_1 = 80$ cm ;
- l'**oculaire** L_2 de courte distance focale $f_2 = 4{,}0$ cm.

Pour observer une étoile ou une planète à l'infini sans fatiguer l'œil (système *afocal*), on règle la distance d entre L_1 et L_2 de sorte que le foyer image F_1' de l'objectif coïncide exactement avec le foyer objet F_2 de l'oculaire.

1. Quelle doit être la longueur $d = f_1 + f_2$ de la lunette ?
2. Expliquer pourquoi un faisceau de rayons parallèles entrant dans l'objectif ressort également **parallèle** de l'oculaire.
3. Calculer le **grossissement angulaire** $G = \frac{f_1}{f_2}$ de cette lunette. L'image observée est-elle droite ou renversée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Principe du microscope optique : Un microscope est composé d'un **objectif** L_1 de très courte focale ($f_1 = 8{,}0$ mm) et d'un **oculaire** L_2 ($f_2 = 25$ mm), séparés par un tube fixe de longueur $d = 193$ mm.

1. On place un minuscule objet (cellule) de taille $h = 0{,}050$ mm (50 μm) à $p_1 = 8{,}4$ **mm** devant l'objectif L_1. Calculer la position p_1' de l'image intermédiaire A_1B_1 et le grandissement γ_1 de l'objectif.
2. À quelle distance $p_2 = d - p_1'$ de l'oculaire L_2 se forme cette image intermédiaire ? Que vaut p_2 comparé à $f_2 = 25$ mm ?
3. Expliquer le rôle de l'oculaire lorsque $p_2 = f_2$, et calculer le grossissement commercial total si l'oculaire apporte un grossissement $G_2 = \frac{250\text{ mm}}{f_2} = 10\times$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Principe de la lunette de Galilée (objectif convergent + oculaire divergent) : Pour obtenir une image **droite** (à l'endroit) et un instrument plus court, Galilée remplaça l'oculaire convergent par une **lentille divergente**.

Une lunette de Galilée possède un objectif convergent L_1 de focale $f_1 = +40$ cm et un oculaire divergent L_2 de focale $f_2 = -5{,}0$ cm. En réglage afocal, les foyers images F_1' et objet F_2 (virtuel, situé derrière L_2) sont confondus, donc $d = f_1 + f_2$.

1. Calculer la longueur d de cette lunette de Galilée et la comparer à une lunette astronomique de mêmes focales ($|+40| + |-5| = 45$ cm).
2. Calculer le grossissement angulaire $G = \left|\frac{f_1}{f_2}\right|$, et expliquer pourquoi l'image observée est **droite**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Téléobjectif (association convergente + divergente espacées) : Un téléobjectif permet d'obtenir un grandissement important dans un boîtier court. Il associe une lentille convergente frontale L_1 ($f_1 = +100$ mm) et une lentille divergente arrière L_2 ($f_2 = -50$ mm) séparées par une distance $d = 75$ **mm**.

Un faisceau de rayons parallèles provenant d'un paysage à l'infini arrive sur L_1.

1. Où convergerait ce faisceau après L_1 si L_2 n'était pas là ? À quelle distance algébrique $p_2 = d - p_1'$ se trouve cet objet virtuel par rapport à L_2 ?
2. En appliquant la formule de conjugaison sur L_2 ($\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{f_2}$), calculer la position p_2' derrière L_2 où se trouve le capteur pour obtenir une image nette.
3. Quelle est la longueur totale $d + p_2'$ de ce téléobjectif, alors qu'une lentille simple équivalente aurait besoin de 200 mm de tirage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Doublet convergente + divergente (objet à distance finie) : On place une lentille convergente L_1 ($f_1 = +20$ cm) et une lentille divergente L_2 ($f_2 = -15$ cm) séparées de $d = 45$ **cm**.

Un objet AB de hauteur $h = 3{,}0$ cm est placé à $p_1 = 60$ **cm devant** L_1.

1. Calculer la position p_1' et la hauteur h_1' de l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par L_1.
2. Quelle est la distance p_2 entre A_1B_1 et L_2 ?
3. Calculer la position p_2', le grandissement total γ_{tot} et la hauteur finale h_2' de l'image A_2B_2 donnée par L_2. Est-elle réelle ou virtuelle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Système à image réelle inversée puis redressée (véhicule optique / longue-vue terrestre) : Une longue-vue terrestre ajoute au milieu d'une lunette une **lentille redresseuse** L_2 de distance focale $f_2 = +10$ cm entre l'objectif et l'oculaire.

1. L'image intermédiaire A_1B_1 formée par l'objectif (de hauteur $h_1' = -1{,}2$ cm, donc renversée) doit être redressée à l'identique ($h_2' = +1{,}2$ cm, soit $\gamma_2 = -1$) sans changer sa taille. À quelle distance p_2 devant L_2 doit se trouver A_1B_1, et à quelle distance p_2' derrière L_2 se forme l'image redressée A_2B_2 ?
2. Quel rallongement total $p_2 + p_2'$ cela ajoute-t-il au tube de la longue-vue ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Faisceau parallèle élargi (expanseur de faisceau laser) : En laboratoire de physique, on veut élargir le diamètre d'un faisceau laser parallèle de $d_1 = 2{,}0$ mm à $d_2 = 10{,}0$ mm tout en conservant un faisceau sortant **parallèle**.

On utilise deux lentilles convergentes montées en système afocal : d'abord une lentille L_1 de courte focale $f_1 = 20$ mm, puis une lentille L_2 de plus grande focale f_2.

1. Expliquer à l'aide des triangles semblables au foyer commun $F_1' = F_2$ pourquoi le rapport des diamètres du faisceau vaut $\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1}$.
2. Calculer la distance focale f_2 nécessaire et la distance D à respecter entre les deux lentilles.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (cas où la deuxième lentille est traversée avant la formation de A_1B_1) : Une lentille convergente L_1 ($f_1 = +30$ cm) et une seconde lentille convergente L_2 ($f_2 = +20$ cm) sont séparées de $d = 40$ **cm**.

Un objet AB de hauteur $h = 3{,}0$ cm est placé à $p_1 = 60$ **cm devant** L_1.

1. Calculer où se formerait l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par L_1 seule (p_1' et h_1').
2. Comme $p_1' > d$, les rayons rencontrent L_2 *avant* d'avoir convergé en A_1B_1. Quelle est la valeur algébrique $p_2 = d - p_1'$ à entrer pour L_2 ?
3. Calculer la position finale p_2' derrière L_2, le grandissement total γ_{tot} et la hauteur finale h_2'.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

On accole une lentille de $+10\,\delta$ et une lentille de $-4\,\delta$.

1. Calculer la vergence et la distance focale de l'ensemble.

2. Un objet est placé à 50 cm de l'ensemble. Où se forme l'image ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Deux lentilles convergentes L_1 ($f_1 = 10$ cm) et L_2 ($f_2 = 20$ cm) sont séparées de 60 cm. Un objet de 1 cm est placé à 15 cm devant L_1.

1. Où L_1 forme-t-elle l'image intermédiaire A_1B_1 ? Quel est le grandissement γ_1 ?
2. Cette image sert d'objet pour L_2. Calculer la position de l'image finale et γ_2.
3. Calculer le grandissement total et la taille de l'image finale. Est-elle droite ou renversée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une lunette astronomique a un objectif de distance focale $f_1 = 1\,000$ mm et un oculaire de $f_2 = 25$ mm. Elle est réglée pour donner d'un astre une image à l'infini (le foyer image de l'objectif coïncide avec le foyer objet de l'oculaire).

1. Quelle est la longueur de la lunette ?
2. Son grossissement vaut $G = \dfrac{f_1}{f_2}$. Le calculer.
3. La Lune a un diamètre apparent de $0{,}5°$. Sous quel angle la voit-on dans la lunette ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un microscope possède un objectif marqué « $\times 40$ » et un oculaire marqué « $\times 10$ ».

1. Quel est le grossissement total ?
2. Une cellule de $20\,\mu$m de diamètre est observée. Quelle taille semble-t-elle avoir (vue à 25 cm) ?
3. On veut un grossissement de $1\,000$. Avec le même oculaire, quel objectif faut-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une lunette de Galilée est formée d'un objectif convergent ($f_1 = 50$ cm) et d'un oculaire **divergent** ($f_2 = -5$ cm). Pour un réglage afocal, la distance entre les lentilles vaut $f_1 + f_2$.

1. Calculer la longueur de la lunette.
2. Calculer le grossissement $G = \left|\dfrac{f_1}{f_2}\right|$.
3. Quel avantage présente cette lunette par rapport à la lunette astronomique ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

On veut élargir le faisceau d'un laser de 2 mm de diamètre. On utilise une lentille divergente L_1 ($f_1 = -2$ cm) suivie d'une lentille convergente L_2 ($f_2 = 10$ cm), placées de façon que le foyer image de L_1 coïncide avec le foyer objet de L_2.

1. Quelle est la distance entre les deux lentilles ?
2. Le faisceau qui sort est parallèle. Quel est son diamètre ? (Utiliser des triangles semblables.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Des jumelles portent l'inscription « 8×42 ».

1. Que signifient ces deux nombres ?

2. La **pupille de sortie** (diamètre du faisceau qui sort de l'oculaire) vaut $\frac{\text{diamètre de l'objectif}}{\text{grossissement}}$. La calculer.
3. La nuit, la pupille de l'œil atteint 7 mm. Des jumelles 10×25 sont-elles adaptées à l'observation nocturne ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un œil myope a une vergence de $62\,\delta$ au repos, alors qu'il lui faudrait $60\,\delta$ pour voir net à l'infini. Il porte des lentilles de contact (accolées à l'œil).

1. Quelle vergence doivent avoir les lentilles de contact ?
2. Pourquoi peut-on simplement additionner les vergences dans ce cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un appareil photo possède un zoom dont la distance focale varie de 18 mm à 55 mm. On photographie une tour très éloignée.

1. Pour un objet lointain, la taille de l'image est proportionnelle à la distance focale. Par combien la taille de l'image de la tour est-elle multipliée en passant de 18 à 55 mm ?
2. Quelle est la conséquence sur le champ photographié ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une lunette astronomique ($f_1 = 80$ cm, $f_2 = 4$ cm) donne une image renversée. Pour l'utiliser comme longue-vue terrestre, on ajoute entre l'objectif et l'oculaire une lentille de redressement L_3 ($f_3 = 5$ cm) en montage $2f$–$2f$.

1. Quel est le grandissement de la lentille de redressement ? Quel est son effet ?
2. De combien la lunette s'allonge-t-elle ?
3. Quelle est la longueur totale de la longue-vue et son grossissement ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Deux lentilles minces accolées ont des vergences $+6$ et -2 dioptries. Donne la vergence totale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Quelle lentille mince accoler à une lentille de $+3$ dioptries pour une vergence totale nulle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Des lentilles accolées ont des focales $+20$ cm et $+50$ cm. Quelle est la focale du système, au dixième de centimètre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On accole une lentille de focale -25 cm et une de focale $+50$ cm. Détermine le type de système.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un faisceau parallèle sort parallèle d'un ensemble de deux lentilles convergentes séparées. Quel point doit être commun dans le réglage afocal ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Deux lentilles convergentes de focales 15 et 5 cm ont un foyer commun entre elles. À quelle distance sont-elles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

La première lentille crée une image réelle 15 cm derrière elle. La seconde est placée 40 cm derrière la première. Quelle est la distance objet pour cette seconde lentille ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un système de lentilles accolées a une focale totale de +40 cm. L'une vaut +4 dioptries. Trouve la vergence de l'autre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une étape optique a un grandissement de -2 et la suivante de -3. Si l'image intermédiaire sert d'objet, calcule le grandissement final.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Pourquoi ne peut-on généralement pas additionner les vergences de deux lentilles largement séparées pour calculer la vergence équivalente ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Forces et équilibre

Exercice 1

Caractéristiques d'une force, masse et poids :

1. Citer les 4 **caractéristiques** qui définissent entièrement un vecteur force $\vec{F}$.
2. Quelle est la différence entre la **masse** m et le **poids** P d'un objet ? Préciser leurs unités dans le Système International (SI) et l'instrument qui mesure chacune.
3. Une sonde spatiale a une masse $m = 120$ kg sur Terre ($g_{\text{Terre}} = 9{,}81$ N/kg). Calculer son poids sur Terre, puis sur la Lune ($g_{\text{Lune}} = 1{,}62$ N/kg). Si l'on représente son poids terrestre par une flèche à l'échelle 1 cm $\leftrightarrow$ 200 N, quelle longueur aura le vecteur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Résultante de deux forces et équilibre d'un point matériel :

1. Deux remorqueurs tirent une péniche avec des forces perpendiculaires $\vec{F}_1$ (vers le Nord, $F_1 = 600$ N) et $\vec{F}_2$ (vers l'Est, $F_2 = 800$ N). Calculer l'intensité de la **force résultante** $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, ainsi que la direction et le sens de la force $\vec{F}_3$ qu'il faudrait exercer pour maintenir la péniche à l'équilibre.

2. On tire un anneau immobile à l'aide de deux ressorts : l'un exerce 30 N vers la droite, l'autre 40 N vers la gauche. Quelle troisième force faut-il appliquer pour obtenir l'équilibre statique ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Équilibre d'un corps suspendu par deux câbles symétriques : Un panneau de signalisation de masse $m = 12$ kg (poids $P = 120$ N avec $g = 10$ N/kg) est suspendu à un plafond horizontal par **deux câbles symétriques** formant chacun un angle de 30° **avec l'horizontale** (soit 60° avec la verticale).

1. Faire le bilan des 3 **forces** s'exerçant sur le panneau à l'équilibre.
2. En projetant l'équilibre $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ sur l'axe vertical ($T_{1y} + T_{2y} = P$), et sachant que $\sin(30°) = 0{,}50$, calculer la **tension** T dans chacun des deux câbles.
3. Pourquoi est-il impossible de tendre une corde horizontalement (angle 0°) avec un poids suspendu au milieu, même en tirant très fort ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Allongement d'un ressort (loi de Hooke : $F = k \cdot \Delta\ell$) : Un ressort à spires non jointives a une longueur à vide $\ell_0 = 15{,}0$ cm. Lorsqu'on y suspend une masse $m = 200$ g (avec $g = 10$ N/kg), sa longueur totale devient $\ell = 19{,}0$ cm.

1. Calculer le poids P suspendu et l'allongement $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ (en cm puis en m).
2. Calculer la **constante de raideur** k de ce ressort en N/m (et en N/cm).
3. Quelle masse maximale peut-on suspendre si le ressort ne doit pas dépasser $\ell_{\max} = 27{,}0$ cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Association de ressorts en parallèle et en série : On dispose de deux ressorts identiques de constante de raideur $k = 40$ N/m chacun. On suspend une masse $m = 0{,}80$ kg ($g = 10$ N/kg, soit $P = 8{,}0$ N).

1. **Montage en parallèle** (la barre portant la masse est accrochée côte à côte aux deux ressorts) : quelle force supporte chaque ressort, et quel est l'allongement $\Delta\ell_{\text{par}}$ du système ? Quelle est la raideur équivalente k_{par} ?
2. **Montage en série** (les deux ressorts sont accrochés bout à bout l'un sous l'autre) : quelle force traverse chaque ressort, et quel est l'allongement total $\Delta\ell_{\text{sér}}$? Quelle est la raideur équivalente $k_{\text{sér}}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Équilibre sur un plan incliné sans frottement : Un chariot de masse $m = 4{,}0$ kg ($g = 10$ N/kg, poids $P = 40$ N) est retenu immobile sur une rampe lisse (sans frottement) inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, à l'aide d'un câble parallèle à la pente.

Rappels : $\sin(30°) = 0{,}50$; $\cos(30°) \approx 0{,}866$.

1. Faire le bilan des 3 **forces** s'exerçant sur le chariot : le poids $\vec{P}$, la réaction normale du plan $\vec{R}_N$ (perpendiculaire à la rampe) et la tension du câble $\vec{T}$ (parallèle à la rampe vers le haut).
2. Décomposer le poids $\vec{P}$ selon la pente ($P_{\parallel} = P\sin\alpha$) et perpendiculairement à la pente ($P_{\perp} = P\cos\alpha$).
3. En déduire la tension T du câble et l'intensité R_N de la réaction du support à l'équilibre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Principe du plan incliné (avantage mécanique) et force de frottement : Un ouvrier hisse une caisse de masse $m = 60$ kg ($g = 10$ N/kg, soit $P = 600$ N) sur une hauteur verticale $h = 1{,}5$ m en la faisant glisser le long d'une rampe inclinée de longueur $L = 6{,}0$ m.

1. Calculer le sinus de l'angle d'inclinaison α de la rampe ($\sin\alpha = \frac{h}{L}$).
2. S'il n'y avait **aucun frottement**, quelle force parallèle à la pente suffirait pour monter la caisse à vitesse constante ?
3. En réalité, l'ouvrier doit pousser avec une force constante $F = 210$ N pour vaincre aussi les frottements. Quelle est l'intensité de la **force de frottement** f ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Équilibre avec trois forces non parallèles (règle du polygone des forces) : Un feu de signalisation de poids $P = 100$ N est maintenu en équilibre par deux câbles :

- un câble **horizontal** relié au mur de gauche (tension $\vec{T}_1$) ;
- un câble **oblique** relié au mur de droite et formant un angle de 45° avec l'horizontale (tension $\vec{T}_2$).

1. Expliquer pourquoi les droites d'action de trois forces coplanaires en équilibre doivent être **concourantes** (ou parallèles) et former un **triangle fermé** lorsqu'on les met bout à bout.
2. À l'aide du triangle rectangle isocèle formé par $\vec{P}$, $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ (angle 45°), calculer exactement les tensions T_1 et T_2.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Principe des poulies et palans : Pour soulever verticalement une caisse de masse $m = 80$ kg ($g = 10$ N/kg, poids $P = 800$ N) à vitesse constante :

1. On utilise d'abord une **poulie fixe** simple accrochée au plafond. Quelle force F_1 l'ouvrier doit-il exercer sur la corde ? Quel est l'avantage de cette poulie ?
2. On utilise ensuite un **palan à 4 brins porteurs** (deux poulies en haut, deux poulies mobiles attachées à la charge). Quelle force F_2 suffit maintenant pour soulever la caisse (en négligeant frottements et poids des poulies) ?
3. Pour monter la caisse de $h = 2{,}0$ m avec ce palan, quelle longueur L de corde l'ouvrier doit-il tirer ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (frottement statique et inclinaison limite) : Une brique de masse $m = 2{,}0$ kg ($g = 10$ N/kg, $P = 20$ N) repose sur une planche en bois horizontale.

1. On pousse la brique horizontalement : elle ne commence à glisser que lorsque la poussée dépasse $F_{\max} = 8{,}0$ N. Calculer le **coefficient de frottement statique** $\mu_s = \frac{F_{\max}}{R_N}$.
2. On relève maintenant progressivement la planche d'un angle α. À l'équilibre juste avant le glissement, $P_{\parallel} = \mu_s \cdot P_{\perp}$, ce qui donne $\tan(\alpha_{\max}) = \mu_s$. À partir de quel angle $\alpha_{\max}$ la brique va-t-elle se mettre à glisser toute seule ? *(On donne* $\tan(21{,}8^\circ) = 0{,}40$*.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Un astronaute a une masse de 70 kg. On prend $g_{\text{Terre}} = 9{,}81$ N/kg et $g_{\text{Lune}} = 1{,}62$ N/kg.

1. Calculer son poids sur la Terre et sur la Lune.
2. Sa masse change-t-elle sur la Lune ?
3. Quelle masse un objet devrait-il avoir sur Terre pour peser autant que l'astronaute sur la Lune ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Deux forces de 30 N et 40 N s'appliquent au même point. Calculer l'intensité de la résultante lorsque les forces sont :

1. de même direction et de même sens ;
2. de même direction et de sens opposés ;
3. perpendiculaires.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un ressort a une longueur à vide de 12 cm et une constante de raideur $k = 50$ N/m ($g = 10$ N/kg).

1. On suspend une masse de 300 g. Calculer l'allongement et la longueur du ressort.
2. Avec une autre masse, le ressort mesure 20 cm. Quelle est cette masse ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un livre de 1,2 kg est posé sur une table ($g = 10$ N/kg).

1. Quelles forces s'exercent sur le livre ? Donner leurs intensités.
2. On pousse le livre horizontalement avec une force de 5 N, mais il ne bouge pas. Quelle autre force apparaît ? Quelle est son intensité ?
3. Il faut une force de 6 N pour le faire glisser. Calculer le coefficient de frottement $\mu = \frac{F_{\text{frott}}}{N}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un chariot de 4 kg est maintenu immobile sur un plan incliné à 30°, sans frottement, par une corde parallèle au plan ($g = 10$ N/kg). La composante du poids parallèle au plan vaut $P \times \sin\alpha$ ($\sin 30° = 0{,}5$).

1. Calculer le poids du chariot.
2. Calculer la tension de la corde.
3. Que devient cette tension si le plan est incliné à 90° ? À 0° ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un ouvrier veut soulever une caisse de 60 kg de 1 m ($g = 10$ N/kg, poulies et cordes de masse négligeable, sans frottement).

1. Avec une poulie fixe, quelle force doit-il exercer ? Quel est l'intérêt de la poulie ?
2. Avec une poulie mobile (la caisse est accrochée à la poulie, soutenue par deux brins), quelle force doit-il exercer ? Quelle longueur de corde doit-il tirer ?
3. Que remarque-t-on en calculant le produit force × longueur tirée dans les deux cas ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Trois cordes attachées à un anneau tirent chacune avec une force de 100 N, dans trois directions formant entre elles des angles de 120°.

1. L'anneau est-il en équilibre ? Justifier par un raisonnement de symétrie.
2. On coupe l'une des cordes. Quelle est la résultante des deux forces restantes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Deux personnes tirent chacune sur une extrémité d'une corde avec une force de 200 N, en sens opposés. La corde est immobile.

1. Quelle est la tension de la corde : 0 N, 200 N ou 400 N ?
2. On attache une extrémité de la corde à un arbre et une seule personne tire avec 200 N. La tension change-t-elle ?
3. Dans un tir à la corde, une équipe tire avec 800 N et l'autre avec 750 N. Quelle est la résultante ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Deux dynamomètres sont accrochés l'un sous l'autre au plafond. On suspend une masse de 2 kg au dynamomètre du bas ($g = 10$ N/kg, dynamomètres de masse négligeable).

1. Quelle valeur indique chaque dynamomètre ?
2. On accroche maintenant la masse à deux dynamomètres placés **côte à côte** (verticaux, symétriques). Que lit-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Pour faire glisser à vitesse constante une caisse de 50 kg sur un sol horizontal, il faut la pousser avec une force horizontale de 150 N ($g = 10$ N/kg).

1. Quelle est l'intensité de la force de frottement ?
2. Calculer le coefficient de frottement $\mu = \frac{F_{\text{frott}}}{N}$.
3. On ajoute 30 kg dans la caisse. Quelle force faut-il désormais ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Sur une caisse agissent 27 N vers la droite et 11 N vers la gauche. Calcule la résultante horizontale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un livre de masse 0,6 kg est immobile sur une table horizontale. Prends g = 10 N/kg. Quelle force normale la table exerce-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une caisse a un poids de 75 N là où g = 10 N/kg. Donne sa masse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux cordes tirent un anneau horizontalement, avec 6 N vers le nord et 8 N vers l'est. Quelle est la norme de la résultante ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un objet immobile est soumis à une force verticale vers le bas de 15 N et à une force verticale vers le haut de 9 N. Quelle troisième force compense les deux premières ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un palet à vitesse rectiligne constante est tiré par une force horizontale de 14 N. Si la seule autre force horizontale est le frottement, quelle est sa valeur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Comment convertir une force de 35 N en longueur sur un dessin à l'échelle 1 cm pour 10 N ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Quelle force le sol exerce-t-il sur un patineur assis qui pousse vers le bas sur le sol, d'après l'action et la réaction ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une masse de 2 kg va d'un lieu où g vaut 10 N/kg vers un lieu où g vaut 4 N/kg. Compare masse et poids.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une lampe pend immobile d'un câble vertical. Le câble exerce une tension de 45 N. Que vaut le poids de la lampe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Force d'Archimède

Exercice 1

Énoncé du principe d'Archimède et poids apparent : On suspend un cube en aluminium (masse volumique $\rho_{\text{Al}} = 2{,}70\ \text{g/cm}^3 = 2\,700\ \text{kg/m}^3$) de volume $V = 200\ \text{cm}^3$ ($2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$) à un dynamomètre (prendre $g = 10\ \text{N/kg}$).

1. Quelle force indique le dynamomètre dans l'air (poids réel P du cube) ?
2. On immerge entièrement ce cube dans de l'eau pure ($\rho_{\text{eau}} = 1\,000\ \text{kg/m}^3$). Calculer la **poussée d'Archimède** $F_A = \rho_{\text{eau}} \cdot V \cdot g$ exercée par l'eau sur le cube (préciser sa direction et son sens).
3. Quelle nouvelle valeur (le *poids apparent*) indique alors le dynamomètre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Couronne d'Hiéron — Déterminer le volume et la masse volumique par la poussée d'Archimède : Un objet métallique inconnu pèse $P = 9{,}65$ N dans l'air. Lorsqu'on l'immerge complètement dans l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 1\,000\ \text{kg/m}^3$), le dynamomètre n'indique plus que $P_{\text{app}} = 9{,}15$ N ($g = 10\ \text{N/kg}$).

1. Quelle est la valeur de la **poussée d'Archimède** F_A subie par cet objet ?
2. En déduire le **volume** V de l'objet (en m^3 puis en cm^3).

3. Calculer sa **masse volumique** ρ (en g/cm^3) et dire s'il peut s'agir d'or pur (19,3 g/cm^3) ou de plomb (11,3 g/cm^3).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Conditions de flottaison (coule, flotte, entre deux eaux) : On lâche sans vitesse initiale au milieu d'une cuve d'huile végétale ($\rho_{\text{huile}} = 0{,}90$ g/cm^3) quatre sphères pleines de même volume $V = 100$ cm^3 :

- (A) cire de paraffine ($\rho_A = 0{,}90$ g/cm^3) ;
- (B) bois de chêne ($\rho_B = 0{,}72$ g/cm^3) ;
- (C) glace ($\rho_C = 0{,}92$ g/cm^3) ;
- (D) plastique PVC ($\rho_D = 1{,}40$ g/cm^3).

1. Prédire le comportement de chaque sphère (remonte en surface, reste immobile entre deux eaux, ou coule au fond).
2. Pour la sphère en bois (B) une fois qu'elle flotte à l'équilibre à la surface de l'huile, quelle **fraction (en pourcentage)** de son volume reste **immergée** dans l'huile ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

La partie émergée de l'iceberg : Un iceberg constitué de glace pure ($\rho_{\text{glace}} = 917$ kg/m^3) flotte dans l'eau de mer salée ($\rho_{\text{mer}} = 1\,025$ kg/m^3).

1. Calculer le **pourcentage du volume total** de l'iceberg qui se trouve **sous la surface** de l'eau (partie immergée), et le pourcentage **émergé** (visible hors de l'eau).
2. Si la partie visible au-dessus de l'eau a un volume estimé à $V_{\text{ém}} = 21\,600$ m^3, quel est le volume total V_{tot} de l'iceberg ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Le mystère du glaçon qui fond dans un verre d'eau : Un verre cylindrique contient de l'eau pure jusqu'à une hauteur h, et un gros glaçon d'eau pure ($m = 18$ g, $\rho_{\text{glace}} = 0{,}90$ g/cm^3) y flotte librement. On marque d'un trait le niveau exact de l'eau.

1. Calculer le volume total du glaçon, puis le volume exact de la partie immergée sous la surface de l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 1{,}00$ g/cm^3).
2. Lorsque le glaçon aura **entièrement fondu**, quel sera le volume d'eau liquide obtenu à partir des 18 g de glace ?
3. En comparant ces deux volumes, dire si le niveau de l'eau dans le verre va **monter, baisser ou rester rigoureusement identique**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Charge maximale d'un radeau / bateau : Un radeau plat rectangulaire est constitué de troncs de bois ($\mathcal{A} = 6{,}0$ m^2 de surface au sol, hauteur totale $H = 0{,}30$ m). La masse du radeau vide est $m_{\text{radeau}} = 900$ kg. Il flotte sur un lac d'eau douce ($\rho_{\text{eau}} = 1\,000$ kg/m^3, $g = 10$ N/kg).

1. Calculer le volume total du radeau et la **poussée d'Archimède maximale** qu'il peut recevoir juste avant que l'eau n'affleure son bord supérieur (immersion totale).
2. Quelle est la **charge maximale** (en kg, et combien de personnes de 75 kg) que ce radeau peut transporter sans couler ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Principe du sous-marin et du ludion : Un sous-marin possède une coque rigide de volume extérieur fixe $V = 2\,500$ m^3.

1. En plongée complète dans l'eau de mer ($\rho_{\text{mer}} = 1\,025$ kg/m^3), quelle doit être la **masse totale** du sous-marin (coque + équipage + eau dans ses ballasts) pour qu'il reste en équilibre immobile entre deux eaux ?
2. Comment le sous-marin fait-il pour **remonter** à la surface sans changer son volume extérieur ? Expliquer ce qui varie : son poids P ou la poussée d'Archimède F_A ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Poussée d'Archimède dans l'air (ballon-sonde à l'hélium) : La poussée d'Archimède s'applique dans tous les fluides, y compris les gaz ! Un ballon météorologique gonflé à l'hélium ($\rho_{\text{He}} = 0{,}18$ kg/m^3) a un volume $V = 10$ m^3 et est entouré d'air ($\rho_{\text{air}} = 1{,}29$ kg/m^3). L'enveloppe vide du ballon a une masse $m_{\text{env}} = 1{,}5$ kg ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer la **poussée d'Archimède** F_A exercée par l'air sur le ballon.
2. Calculer le **poids total** P_{tot} du ballon (enveloppe + hélium à l'intérieur).
3. Quelle masse maximale d'instruments scientifiques (m_{nacelle}) ce ballon peut-il encore soulever ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Problème d'équilibre combiné (ressort + poussée d'Archimède) : Un cylindre plein de volume $V = 500$ cm^3 ($5{,}0 \times 10^{-4}$ m^3) et de masse $m = 2{,}5$ kg est suspendu à un ressort vertical de raideur $k = 200$ N/m ($g = 10$ N/kg).

1. Quel est l'allongement $\Delta\ell_1$ du ressort lorsque le cylindre pend dans l'air ?
2. On plonge ensuite complètement le cylindre dans de l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 1\,000$ kg/m^3), tout en le laissant suspendu au ressort. Calculer la poussée d'Archimède F_A, la nouvelle tension T_2 du ressort, et le nouvel allongement $\Delta\ell_2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Objet flottant à la frontière de deux liquides non miscibles : Dans un grand récipient transparent, on verse de l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 1{,}00$ g/cm^3) puis, par-dessus, une épaisse couche d'huile ($\rho_{\text{huile}} = 0{,}80$ g/cm^3).

On dépose délicatement un cube plein homogène de côté 10 cm (volume $V = 1\,000$ cm^3) et de masse volumique $\rho_{\text{cube}} = 0{,}92$ g/cm^3. Ce cube s'immobilise **entièrement recouvert** par les liquides, à cheval entre l'eau (en bas) et l'huile (en haut).

1. Pourquoi le cube ne flotte-t-il pas en haut de l'huile, et pourquoi ne coule-t-il pas tout au fond de l'eau ?
2. En notant V_{eau} le volume plongé dans l'eau et $V_{\text{huile}} = V - V_{\text{eau}}$ le volume plongé dans l'huile, écrire l'équilibre $P = F_{A,\text{eau}} + F_{A,\text{huile}}$ et calculer exactement V_{eau} et V_{huile}.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Une pierre de 5 kg et de volume 2 dm^3 est entièrement plongée dans l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 1\,000$ kg/m^3, $g = 10$ N/kg).

1. Calculer la poussée d'Archimède.
2. Calculer le poids de la pierre et son poids apparent dans l'eau.
3. La pierre coule-t-elle ? Justifier par les masses volumiques.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un objet suspendu à un dynamomètre indique 12 N dans l'air et 7,2 N lorsqu'il est complètement immergé dans l'eau ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer la poussée d'Archimède.
2. En déduire le volume de l'objet.
3. Calculer sa masse volumique. De quel matériau peut-il s'agir (verre 2 500 ; granit 2 700 ; béton 2 300 ; plastique PVC 1 400 kg/m^3) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un bloc de bois de 20 cm × 10 cm × 5 cm ($\rho_{\text{bois}} = 600$ kg/m^3) flotte à plat sur l'eau ($g = 10$ N/kg).

1. Calculer la masse et le poids du bloc.
2. Quel volume d'eau doit-il déplacer pour flotter ?
3. Sur quelle hauteur le bloc est-il immergé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un iceberg ($\rho_{\text{glace}} = 917$ kg/m^3) flotte dans l'eau de mer ($\rho = 1\,025$ kg/m^3).

1. Quelle fraction de son volume est immergée ?
2. Quel pourcentage dépasse de la surface ?
3. Le même glaçon flotterait-il plus haut ou plus bas dans de l'eau douce ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une péniche a la forme d'un pavé de 10 m de long et 4 m de large ($\rho_{\text{eau}} = 1\,000$ kg/m^3).

1. De combien s'enfonce-t-elle pour chaque tonne de chargement ?
2. On charge 6 tonnes de sable. De combien s'enfonce-t-elle ?
3. Elle s'enfonce encore de 5 cm lorsque des passagers montent à bord. Quelle est leur masse totale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un ballon gonflé à l'hélium a un volume de 10 m^3. On donne $\rho_{\text{air}} = 1{,}2$ kg/m^3, $\rho_{\text{hélium}} = 0{,}18$ kg/m^3, $g = 10$ N/kg. L'enveloppe pèse 3 kg.

1. Calculer la poussée d'Archimède dans l'air.
2. Calculer le poids de l'hélium et de l'enveloppe.
3. Quelle masse maximale le ballon peut-il soulever ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un œuf frais a une masse volumique d'environ 1 080 kg/m^3.

1. Que fait l'œuf dans de l'eau du robinet (1 000 kg/m^3) ?
2. On dissout du sel jusqu'à obtenir 1 100 kg/m^3. Que se passe-t-il ?
3. Comment obtenir un œuf qui reste « entre deux eaux » ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un densimètre est un tube lesté de masse 20 g dont la tige a une section de 1 cm^2. On suppose que seule la tige est immergée.

1. Sur quelle longueur s'enfonce-t-il dans l'eau (1 g/cm^3) ?
2. Et dans l'alcool (0,8 g/cm^3) ?
3. Les graduations les plus élevées (grandes masses volumiques) sont-elles en haut ou en bas de la tige ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un cargo a une masse totale de 10 000 tonnes. Il passe d'un fleuve (eau douce, 1 000 kg/m^3) à la mer (1 025 kg/m^3).

1. Quel volume d'eau déplace-t-il dans le fleuve ? En mer ?
2. Le cargo s'enfonce-t-il plus ou moins en mer ?
3. Sa surface de flottaison vaut 2 000 m^2. De combien remonte-t-il (au cm près) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Le corps humain a une masse volumique moyenne d'environ 985 kg/m^3 (poumons remplis d'air). Une personne a une masse de 70 kg.

1. Calculer son volume (au litre près).
2. Quelle fraction de son corps est immergée lorsqu'elle flotte dans une piscine (1 000 kg/m^3) ?
3. Et dans la mer Morte (1 240 kg/m^3) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un corps déplace 0,003 m^3 d'eau. Calcule la poussée si l'eau a une masse volumique de 1 000 kg/m^3 et $g = 10$ N/kg.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un objet de poids 18 N flotte immobile. Quelle poussée exerce l'eau sur lui ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un dynamomètre indique 12 N dans l'air et 8 N quand l'objet est sous l'eau, sans toucher le récipient. Quelle poussée de l'eau obtient-on en négligeant celle de l'air ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux objets totalement immergés dans la même eau ont le même volume mais des masses différentes. Compare les poussées.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un bloc de masse volumique 600 kg/m^3 flotte dans l'eau de masse volumique 1 000 kg/m^3. Quelle fraction de son volume est immergée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un objet est immergé dans de l'eau douce puis dans de l'eau salée plus dense, au même volume immergé. Dans quel cas la poussée est-elle plus forte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un objet pleinement immergé descend d'un mètre dans une eau de masse volumique uniforme. Sa poussée change-t-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un bloc de 250 cm^3 est entièrement immergé dans l'eau. Quelle masse d'eau déplace-t-il à 1 g/cm^3 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un objet totalement immergé pèse 24 N et subit une poussée de 28 N. Dans quel sens commence-t-il à se déplacer si on le lâche au repos ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un flotteur libre de masse 3 kg flotte dans un liquide de masse volumique 750 kg/m^3. Quel volume est immergé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Moments et équilibre

Exercice 1

Moment d'une force et clé plate : Pour dévisser un boulon très serré autour de son axe O, un mécanicien tire perpendiculairement à l'extrémité d'une clé plate longue de $d = 25$ cm avec une force $F = 80$ N.

1. Calculer le **moment de force** $M = F \cdot d$ (en $\text{N} \cdot \text{m}$) exercé sur le boulon.
2. Le boulon résiste jusqu'à un couple de 30 $\text{N} \cdot \text{m}$. En utilisant un tube rallonge pour porter le bras de levier à $d' = 50$ cm, quelle force minimale F' suffit maintenant pour le dévisser ?
3. Pourquoi est-il presque impossible d'ouvrir une porte en poussant près des charnières (gonds) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Principe des leviers — Balançoire à bascule : Une planche homogène de masse négligeable est posée en son milieu O sur un pivot. Un enfant A de masse $m_A = 36$ kg s'assoit à 1,5 **m à gauche** du pivot.

1. À quelle distance d_B à droite du pivot doit s'asseoir son camarade B de masse $m_B = 27$ kg pour maintenir la balançoire parfaitement horizontale (prendre $g = 10$ N/kg) ?
2. Un troisième enfant C ($m_C = 20$ kg) vient s'asseoir à 0,90 **m à gauche** du pivot, en plus de A. Où B (27 kg) doit-il maintenant s'asseoir à droite pour rétablir l'équilibre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Levier d'Archimède (pied-de-biche / barre à mine) : Pour soulever un bloc de pierre nécessitant une force verticale de $F_{\text{bloc}} = 2\,400$ N, un ouvrier utilise une barre rigide longue de $L = 1{,}80$ m en plaçant une cale servant de pivot à $d_1 = 0{,}20$ m du bloc.

1. Quel est le bras de levier d_2 dont dispose l'ouvrier à l'autre extrémité de la barre ?
2. Quelle force verticale minimale F_{ouvrier} doit-il exercer vers le bas pour soulever le bloc ? Quel est le *facteur de multiplication de force* obtenu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Bras de levier réel avec une force inclinée : Une barre horizontale OA de longueur $L = 1{,}20$ m est articulée en O à gauche. On exerce à son extrémité droite A une force $F = 50$ N inclinée vers le haut d'un angle $\theta = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale ($\sin 30^\circ = 0{,}50$; $\cos 30^\circ \approx 0{,}866$).

1. Expliquer pourquoi le bras de levier géométrique $d_\perp$ (distance perpendiculaire entre l'axe O et la droite d'action de $\vec{F}$) vaut $d_\perp = L\sin(30^\circ)$ (et non L !).
2. Calculer le moment de cette force par rapport à O (en précisant le sens de rotation : horaire ou anti-horaire).
3. Pour quel angle θ ce moment serait-il maximal ? nul ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Prise en compte de la masse propre d'une règle homogène : Une règle en bois **homogène** de longueur $L = 1{,}00$ m (100 cm) a une masse $m_R = 200$ g ($g = 10$ N/kg, poids $P_R = 2{,}0$ N). Elle est posée sur un couteau (pivot) placé non pas au milieu, mais à la graduation 30 **cm**.

1. En quel point précis s'applique le poids $\vec{P}_R$ de la règle homogène ? Quel est son bras de levier par rapport au pivot à 30 cm ?
2. Quelle masse m doit-on suspendre à l'extrémité gauche (graduation 0 cm) pour maintenir la règle horizontale en équilibre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Les 3 classes de leviers (exemples concrets et brouette) :

1. Rappeler la position relative du **pivot** (O), de la **force résistante** (R) et de la **force motrice** (M) pour les trois genres de leviers : inter-appui (ex. ciseaux), inter-résistant (ex. brouette), inter-moteur (ex. pince à épiler / avant-bras).
2. Une brouette chargée de sable a une masse totale $m = 60$ kg ($g = 10$ N/kg, $P = 600$ N). Son centre de gravité se trouve à $d_1 = 0{,}45$ m de l'axe de la roue, et les poignées où le jardinier soulève se trouvent à $d_2 = 1{,}35$ m de l'axe de la roue. Quelle force verticale F doit exercer le jardinier pour décoller les pieds de la brouette ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Double condition d'équilibre d'un solide (forces ET moments) — Poutre sur deux appuis : Une passerelle horizontale homogène AB de longueur $L = 6{,}0$ m et de masse $m_P = 300$ kg ($P_P = 3\,000$ N appliqué au milieu à 3,0 m) repose librement sur deux piliers situés exactement à ses deux extrémités A et B.

Un randonneur de masse $m_R = 90$ kg ($P_R = 900$ N) s'arrête sur la passerelle à 2,0 **m du pilier gauche** A (donc à 4,0 m du pilier droit B).

1. En écrivant l'équilibre des moments par rapport au pilier gauche A ($\sum M_A = 0$), calculer la force verticale de soutien R_B exercée par le pilier droit B.
2. Utiliser l'équilibre des forces verticales ($R_A + R_B = P_P + P_R$) pour en déduire la force R_A exercée par le pilier gauche A.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Grue à contrepoids : Une grue de chantier possède une flèche horizontale supportée par le mât central O :

- du côté gauche (contre-flèche), un contrepoids fixe de masse $M = 4\,000$ kg ($40\,000$ N) est placé à $d_C = 5{,}0$ m de O ;
- du côté droit (flèche), un chariot mobile peut se déplacer jusqu'à $d_{\max} = 25$ m de O. On néglige la masse propre de la flèche.

1. Quelle **charge maximale** (en kg et en tonnes) cette grue peut-elle soulever à l'extrémité de la flèche (25 m) sans basculer ?
2. Si la grue doit soulever un bloc de béton de $2\,000$ kg ($20\,000$ N), jusqu'à quelle **distance maximale** d de O peut-on avancer le chariot ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Le treuil et le couple d'un volant : Un treuil servant à remonter un seau d'eau d'un puits est composé d'un tambour cylindrique de rayon $r = 10$ cm (0,10 m) entraîné par une manivelle de rayon $R = 40$ cm (0,40 m).

1. Le seau plein pèse $P = 160$ N. Quelle force minimale F perpendiculaire à la manivelle faut-il exercer pour le remonter à vitesse constante ?
2. Un conducteur tourne le volant de sa voiture (diamètre $D = 40$ cm, donc rayon 20 cm) en appliquant avec ses deux mains deux forces parallèles, égales et de sens opposés de $F_v = 15$ N chacune, tangentes aux bords opposés du volant (**couple de forces**). Calculer le moment total (couple) exercé sur la colonne de direction.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse — Échelle contre un mur lisse (forces et moments) : Une échelle homogène de longueur $L = 5{,}0$ m et de poids $P = 200$ N est posée sur un sol horizontal rugueux et appuyée contre un mur vertical **lisse sans frottement**, de sorte que son pied est à $x = 3{,}0$ m du mur et son sommet est à $h = 4{,}0$ m de hauteur.

1. Quel est le bras de levier horizontal du poids $\vec{P}$ (appliqué au milieu de l'échelle) par rapport au pied A de l'échelle au sol ?
2. Comme le mur est sans frottement, la réaction $\vec{R}_M$ du mur en haut est **horizontale** (perpendiculaire au mur), avec un bras de levier vertical de $h = 4{,}0$ m par rapport à A. En écrivant l'équilibre des moments par rapport à A, calculer $\vec{R}_M$.
3. En déduire les deux composantes de la réaction du sol en A : la réaction normale R_N et la force de frottement horizontale f qui empêche l'échelle de glisser.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Pour serrer un écrou, on exerce une force de 40 N perpendiculairement à une clé, à 25 cm de l'axe de l'écrou.

1. Calculer le moment de la force.
2. Quelle force faudrait-il avec une clé de 40 cm pour obtenir le même moment ?
3. Pourquoi est-il plus facile d'ouvrir une porte en poussant près de la poignée que près des charnières ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Sur une balançoire à bascule de masse négligeable, Léa (30 kg) est assise à 2 m du pivot.

1. À quelle distance du pivot doit s'asseoir son père (75 kg) pour équilibrer la balançoire ?
2. Son frère (40 kg) s'assoit à 1,5 m du même côté que le père, qui ne bouge plus. L'équilibre est-il conservé ? Sinon, de quel côté penche la balançoire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Avec un pied-de-biche de 1,2 m, on veut soulever une charge exerçant une force de 1 200 N. Le pivot est à 10 cm de la charge.

1. Calculer les deux bras de levier.
2. Quelle force faut-il exercer à l'extrémité de la barre ?
3. De quelle classe de levier s'agit-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Une brouette contient une charge de 600 N dont le centre de gravité est à 40 cm de l'axe de la roue. On la soulève par les poignées situées à 1,5 m de cet axe.

1. Quelle force verticale faut-il exercer sur les poignées ?
2. Quelle force supporte la roue ?
3. Comment réduire encore l'effort ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Classer chaque outil selon le genre de levier :

- 1er **genre** : pivot entre la charge et l'effort ;
- 2e **genre** : charge entre le pivot et l'effort ;
- 3e **genre** : effort entre le pivot et la charge.

1. Une paire de ciseaux.
2. Un casse-noix.
3. Une pince à épiler.
4. L'avant-bras qui soulève un objet (le biceps s'attache près du coude).
5. Une balance romaine.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Une poutre de masse négligeable de 4 m repose sur deux appuis A et B placés à ses extrémités. Une charge de 600 N est posée à 1 m de A.

1. Écrire l'équilibre des moments par rapport à A et calculer la réaction R_B.
2. En déduire R_A.
3. Où faut-il placer la charge pour que les deux appuis portent la même force ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Une règle homogène de 1 m et de masse 200 g repose sur un pivot placé à la graduation 30 cm.

1. Où s'applique le poids de la règle ? À quelle distance du pivot ?
2. Quelle masse faut-il suspendre à la graduation 0 cm pour équilibrer la règle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

On fabrique un mobile : une tige horizontale de masse négligeable est suspendue par un fil. À gauche du fil, on accroche un oiseau en papier de 50 g à 12 cm. À droite, on veut accrocher une étoile de 30 g.

1. À quelle distance du fil faut-il placer l'étoile ?
2. Quelle force le fil de suspension supporte-t-il ($g = 10$ N/kg) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un treuil permet de remonter un seau de 20 kg d'un puits ($g = 10$ N/kg). La corde s'enroule sur un tambour de 10 cm de rayon ; la manivelle a un bras de 40 cm.

1. Calculer le moment du poids du seau par rapport à l'axe.
2. Quelle force minimale faut-il exercer perpendiculairement à la manivelle ?
3. Pour remonter le seau de 10 m, quelle distance la main parcourt-elle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

On tient dans la main un haltère de 5 kg, l'avant-bras horizontal ($g = 10$ N/kg). Le coude est le pivot ; le biceps s'attache à 4 cm du coude et tire verticalement ; l'haltère est à 35 cm du coude. On néglige le poids de l'avant-bras.

1. Calculer la force exercée par le biceps.
2. Comparer au poids de l'haltère. Pourquoi ce « mauvais » levier est-il utile ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Une force de 20 N est perpendiculaire à un levier et agit à 30 cm du pivot. Quel est son moment en valeur absolue ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Une force de 50 N agit selon une droite passant par un pivot. Quel est son moment autour de ce pivot ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un poids de 80 N agit à 0,25 m à gauche d'un pivot sur une barre horizontale. Quelle force verticale vers le bas appliquée à 0,50 m à droite équilibre son moment ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux forces verticales vers le bas, de 10 et 15 N, sont appliquées à droite du pivot à 0,4 et 0,2 m. Quel est le moment total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un poids de 90 N est suspendu à droite, à 0,2 m du pivot. À quelle distance à gauche placer un poids de 30 N pour équilibrer une barre horizontale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Quelle force perpendiculaire à un bras de 0,15 m donne le même moment qu'une force de 12 N à 0,30 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Pourquoi la poignée d'une porte est-elle placée loin des charnières ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Une force de 40 N est appliquée à 0,5 m d'un pivot avec un angle de 30° entre le bras et la force. Donne la valeur du moment.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une masse de 2 kg est à 1,2 m à gauche d'une bascule. Quelle masse met-on à 0,8 m à droite pour équilibrer une planche légère ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une barre homogène seule est en équilibre sur un pivot placé en son centre de masse. Pourquoi son propre poids ne la fait-il pas tourner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site