Casse-têtes — Exercices Physique 10e HarmoS

Exercice 1

On observe les deux suites numériques suivantes :

- Suite (T_n) : 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; ...
- Suite (U_n) : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; **31** ; ...

1. Donner les deux termes suivants de la suite (T_n) (nombres triangulaires) et calculer T_{20} sans écrire les 20 termes.
2. Pourquoi le 6$^{\text{e}}$ terme de (U_n) vaut-il 31 et non 32 ? *(Indice : calculer les différences successives entre termes consécutifs ; cette suite donne le nombre maximal de régions créées dans un disque par les cordes reliant n points du cercle !)* Donner le 7$^{\text{e}}$ terme U_7.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Observer les égalités suivantes :

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

1. Expliquer géométriquement (à l'aide d'un carré découpé en « équerres ») pourquoi la somme des n premiers nombres impairs vaut toujours n^2.
2. Utiliser cette régularité pour calculer instantanément :
   - $S_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$
   - $S_2 = 21 + 23 + 25 + \cdots + 59$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Énigme auto-descriptive : On cherche un nombre à 4 **chiffres** $\overline{abcd}$ qui se décrit lui-même de la façon suivante :

- son 1$^{\text{er}}$ chiffre a indique **combien de** 0 figurent dans le nombre ;
- son 2$^{\text{e}}$ chiffre b indique **combien de** 1 figurent dans le nombre ;
- son 3$^{\text{e}}$ chiffre c indique **combien de** 2 figurent dans le nombre ;
- son 4$^{\text{e}}$ chiffre d indique **combien de** 3 figurent dans le nombre.

1. Expliquer pourquoi l'on a obligatoirement $a + b + c + d = 4$ (et $a \geq 1$).
2. Montrer également que $0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + 3 \cdot d = 4$.
3. En déduire les **deux seuls nombres auto-descriptifs** à 4 chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Tableau auto-descriptif : On considère le tableau à 8 cases ci-dessous, dans lequel la deuxième ligne (c_1, c_2, c_3, c_4) doit être complétée par des entiers de sorte que **chaque case c_k indique le nombre total de fois que l'entier k apparaît dans l'ensemble des 8 cases du tableau** (première ligne comprise) :

1	2	3	4
c_1	c_2	c_3	c_4

1. Combien vaut nécessairement la somme $c_1 + c_2 + c_3 + c_4$?
2. Trouver les **deux solutions** possibles pour (c_1, c_2, c_3, c_4).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Le défi des quatre 4 : En utilisant **exactement quatre fois le chiffre** 4, les opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$, la racine carrée $\sqrt{4} = 2$ et des parenthèses (sans coller les chiffres comme 44), écrire une expression mathématique exacte égale à chacun des nombres suivants :

$$0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 10$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

La constante de Kaprekar (6 174) : On part d'un nombre à 4 chiffres (non tous identiques). À chaque étape, on range ses 4 chiffres dans l'ordre décroissant pour former G, dans l'ordre croissant pour former P, puis on calcule $G - P$.

1. Appliquer cet algorithme étape par étape en partant de $N_0 = 3\,524$ jusqu'à obtenir un nombre qui se répète.
2. Vérifier que 6 174 est bien un **point fixe** (invariant) de cette opération.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Dans un **carré magique**, la somme des nombres sur chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux grandes diagonales est toujours la même.

1. Compléter le carré magique ci-dessous en justifiant chaque étape :

11	a	9
b	8	c
7	d	e

2. Montrer algébriquement que dans **tout** carré magique 3×3, la somme magique S vaut toujours le **triple du nombre central** ($S = 3 \times$ centre).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Jeu d'invariant sur tableau : On écrit au tableau les dix entiers de 1 à 10 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

À chaque étape, un joueur choisit **deux nombres quelconques** a et b au tableau, les efface, et écrit à la place leur écart positif $|a - b|$. Au bout de 9 étapes, il ne reste plus qu'**un seul nombre** au tableau.

1. Quel est l'effet d'une étape sur la **parité de la somme** de tous les nombres écrits au tableau ?
2. Le dernier nombre restant peut-il être égal à 0 ? Peut-il être égal à 2 ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Cryptarithme célèbre : Chaque lettre différente représente un chiffre différent de 0 à 9, et la première lettre d'un mot ne peut jamais être 0.

Résoudre l'addition codée suivante :

$$\begin{array}{r} S\,E\,N\,D \\ +\,M\,O\,R\,E \\ \hline =\,M\,O\,N\,E\,Y \end{array}$$

(Indication : commencer par déterminer M, puis O et S, puis le lien entre E et N.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Le tour de magie du nombre 1 089 **(algèbre et régularité) :**

1. Choisir un nombre à 3 chiffres $\overline{abc}$ tel que $a > c + 1$ (par exemple 742). Écrire le nombre renversé $\overline{cba}$, puis calculer la différence $D = \overline{abc} - \overline{cba}$.
2. Renverser les 3 chiffres de D pour former D', puis calculer la somme $D + D'$. Quel résultat obtient-on ?
3. **Démonstration algébrique :** En écrivant $\overline{abc} = 100a+10b+c$ et en observant que $D = 99(a-c)$, démontrer que le résultat final vaut **toujours** 1 089, quel que soit le nombre de départ choisi (avec $a > c + 1$… en fait même $a > c$ si l'on écrit 099 pour 99 !).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

La constante 495 **:** on part d'un nombre de 3 chiffres non tous égaux. On forme le plus grand et le plus petit nombre avec ses chiffres, puis on calcule leur différence. On recommence avec le résultat.

1. Appliquer la méthode à 352.
2. Appliquer la méthode à 100 (le plus petit nombre s'écrit alors 001).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

On considère le nombre $N = 142\,857$.

1. Calculer $2N$, $3N$, $4N$, $5N$ et $6N$. Que remarque-t-on ?
2. Calculer $7N$.
3. Calculer $\frac{1}{7}$ en écriture décimale. Quel lien ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Les tours de Hanoï : on doit déplacer une pile de n disques de tailles différentes d'un piquet à un autre, en utilisant un troisième piquet. On ne déplace qu'un disque à la fois et on ne pose jamais un disque sur un plus petit.

1. Combien de déplacements faut-il au minimum pour 1, 2, 3 disques ?
2. Expliquer pourquoi $H(n) = 2 \times H(n-1) + 1$. En déduire $H(5)$.
3. On admet que $H(n) = 2^n - 1$. Avec 64 disques, à raison d'un déplacement par seconde, combien de temps faudrait-il (ordre de grandeur en années) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

L'épitaphe de Diophante (mathématicien grec) dit en substance :

« Son enfance dura $\frac{1}{6}$ de sa vie ; sa barbe poussa après $\frac{1}{12}$ de plus ; il se maria après $\frac{1}{7}$ de plus, et cinq ans plus tard naquit son fils. Celui-ci vécut la moitié de l'âge de son père, et le père mourut quatre ans après son fils. »

Quel âge avait Diophante à sa mort ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Les lapins de Fibonacci : un couple de lapins nouveau-nés devient adulte au bout d'un mois, puis donne naissance chaque mois à un nouveau couple. Aucun lapin ne meurt.

1. Compléter le nombre de couples au début de chaque mois, de 1 à 8 (1, 1, 2, 3, …).
2. Expliquer pourquoi chaque terme est la somme des deux précédents.
3. Combien de couples y aura-t-il au 12^{e} mois ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

On écrit tous les nombres entiers de 1 à 100.

1. Combien de fois écrit-on le chiffre 1 ?
2. Combien de chiffres écrit-on au total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Pour numéroter les pages d'un livre (à partir de la page 1), un imprimeur a utilisé 1 002 chiffres.

Combien de pages compte ce livre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Quel angle forment les aiguilles d'une horloge :

1. à 4 h 20 ?
2. à 9 h 45 ?
3. Entre 3 h et 4 h, à quel moment (environ) les aiguilles sont-elles superposées ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

1. Écrire 15 comme somme d'au moins deux entiers naturels non nuls **consécutifs**, de toutes les façons possibles.
2. Faire de même avec 16. Que remarque-t-on ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Un nombre de 6 chiffres commence par 1. Si l'on déplace ce 1 à la fin du nombre, on obtient un nombre trois fois plus grand.

Trouver ce nombre.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un damier de 12 par 12 cases perd une case. Peut-on couvrir le reste exactement avec des dominos de deux cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Insère les signes $+$, $-$ ou $\times$ pour faire 27 avec, dans l'ordre, 6, 4, 2 et 1.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Avec les chiffres 1, 2 et 6 utilisés une fois par nombre, donne la plus grande différence entre deux nombres de trois chiffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un cube peint sur ses faces est découpé en $6 \times 6 \times 6$ petits cubes. Combien ont trois faces peintes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Apparie les nombres de 1 à 12 pour que toutes les paires aient la même somme.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Combien de carrés de 2×2 cases contient une grille de 6×6 cases ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un escargot monte de 6 m par jour et redescend de 4 m par nuit. Quand sort-il d'un puits de 12 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Les nombres 1 à 9 sont arrangés dans un carré magique de trois cases sur trois. Quelle somme doit donner chaque ligne ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Place six pièces en quatre lignes droites de trois pièces chacune. Donne une configuration.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une grille de 4×4 cases contient combien de rectangles de toutes tailles alignés sur ses lignes, carrés compris ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site